

Grundlagen der Elektrotechnik

Eine Einführung in die Gleich- und Wechselstromtechnik

Lösungen der Übungsaufgaben aus Kapitel 4

Reinhard Scholz

18. Februar 2019

Die Lösung der Übungsaufgaben erfolgt zunächst analytisch in allgemeiner Form. Anschließend wird die numerische Lösung angegeben, die mit einem Taschenrechner oder mit Octave nachvollzogen werden kann. In den beiliegenden Octave-Skripten ist es aus syntaktischen Gründen nicht möglich, alle im Text benutzten Variablennamen zu verwenden. Die Anpassung wurde jedoch so vorgenommen, dass eine Zuordnung leicht möglich ist.

Teilweise weicht die Vorgehensweise bei der Berechnung mit Octave deutlich von der analytischen Methode ab. Dies ist beispielsweise bei der Lösung von quadratischen Gleichungen der Fall. Hier wird nicht die quadratische Ergänzung verwendet, sondern die Koeffizienten des zugehörigen Polynoms werden als Vektor dargestellt, der einem Algorithmus zur Nullstellensuche übergeben wird.

Die in diesem Dokument eingebundenen Diagramme wurden einer Nachbearbeitung unterzogen, so dass deren Erscheinungsbild von der Bildschirmausgabe abweicht.

Übung 4.1 Bode- und Nyquist-Diagramm (Tiefpassfilter 1. Ordnung)

Das Übertragungsverhalten des in Bild 4.6 dargestellten Tiefpassfilters 1. Ordnung soll im Frequenzbereich $1 \text{ Hz} \leq f \leq 100 \text{ kHz}$ dargestellt werden. Die Übertragungsfunktion ist durch

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)} = \frac{R_2}{R_2 + j\omega L}$$

gegeben.

- Erzeugen Sie den Vektor der Frequenzstützstellen. Ordnen Sie dabei die Stützstellen logarithmisch mit 50 Werten pro Dekade an.
- Stellen Sie die Übertragungsfunktion in einem Nyquist-Diagramm dar.
- Berechnen Sie Amplitudengang und Phasengang und stellen Sie diese in einem Bode-Diagramm dar.
- Ermitteln Sie anhand des Amplitudengangs den Abfall der Amplitude pro Dekade im Sperrbereich.

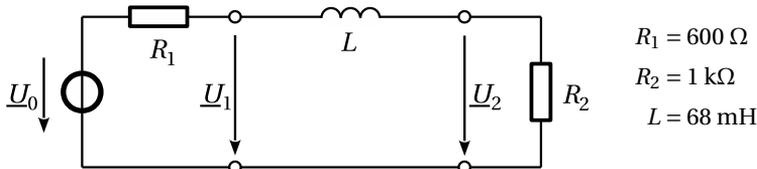


Bild 4.6 Tiefpassfilter 1. Ordnung (Seite 134)

Lösung der Übungsaufgabe 4.1 (Seite 150)

a) Logarithmische Anordnung der Frequenzstützstellen

Wir beginnen zunächst mit einer mathematischen Betrachtung. Um Probleme bei der Logarithmierung einheitenbehafteter Größen zu vermeiden, führen wir im ersten Schritt eine Frequenznormierung durch.

$$\tilde{f} = \frac{f}{f_N} \quad \text{mit } f_N = 1 \text{ Hz}$$

Wir können jede beliebige Frequenz f_N zur Normierung heranziehen, es geht hier lediglich darum, formal eine einheitenlose Größe zu erhalten. (Bei der späteren Realisierung mit Octave ist diese Maßnahme nicht erforderlich.) Die logarithmierte Frequenz wollen wir mit dem Index „lg“ versehen, d.,h.,

$$\tilde{f}_g = \lg(\tilde{f}) = \lg(f/f_N).$$

Auf diese Weise bestimmen wir den Logarithmus der normierten Frequenzgrenzen

$$\tilde{f}_{g\min} = \lg(f_{\min}/f_N) = \lg(1) = 0$$

und

$$\tilde{f}_{g\max} = \lg(f_{\max}/f_N) = \lg(100000) = 5.$$

Der Darstellungsbereich erstreckt sich also über $\tilde{f}_{g\max} - \tilde{f}_{g\min} = 5$ Dekaden. Zur Abdeckung des gesamten Frequenzbereichs mit 50 Stützstellen pro Dekade sind somit

$$N = (\tilde{f}_{g\max} - \tilde{f}_{g\min}) \cdot 50 = 250$$

Stützstellen erforderlich. Dabei muss N selbstverständlich eine natürliche Zahl sein, d.,h., im allgemeinen muss eine Rundung durchgeführt werden. Nun können die logarithmierten normierten Frequenzen in bekannter Weise berechnet werden.

$$\tilde{f}_g(n) = \tilde{f}_{g\min} + \frac{n \cdot (\tilde{f}_{g\max} - \tilde{f}_{g\min})}{N - 1} \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots, (N - 1)$$

Die tatsächlichen Frequenzen der Stützstellen ergeben sich dann zu

$$f(n) = f_N \cdot 10^{\tilde{f}_g(n)}.$$

Bei der logarithmischen Anordnung der Frequenzstützstellen ist der Quotient von zwei aufeinander folgenden Frequenzwerten gleich, d. h., $f(n)/f(n+1) = \text{const. } \forall n$. In Octave wird dies durch die folgende Sequenz realisiert.

```
f_lgmin = log10(fmin);
f_lgmax = log10(fmax);
N = round((f_lgmax-f_lgmin)*M);
n = 0:N-1;
f_lg = f_lgmin+n*(f_lgmax-f_lgmin)/(N-1);
f = 10.^(f_lg);
```

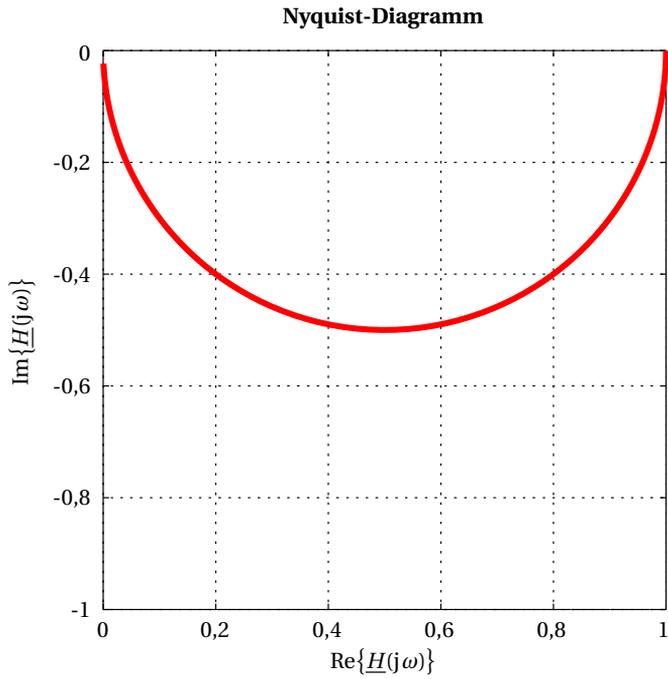
Octave kennt auch die Funktion `logspace()`. Allerdings ist auch hier die Logarithmierung der Bereichsgrenzen und die Berechnung der Anzahl der Stützstellen erforderlich, so dass nur die letzten beiden Zeilen damit ersetzt werden können.

b) Nyquist-Diagramm

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{R_2}{R_2 + j\omega L}$$

$$\operatorname{Re}\{\underline{H}(j\omega)\} = \frac{R_2^2}{R_2^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\operatorname{Im}\{\underline{H}(j\omega)\} = \frac{-\omega L R_2}{R_2^2 + \omega^2 L^2}$$



c) Amplituden- und Phasengang

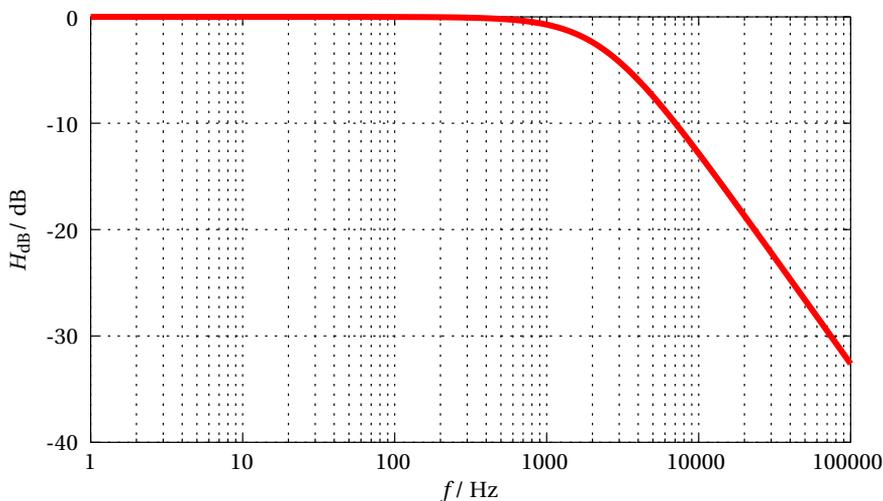
$$|\underline{H}(j\omega)|^2 = \left| \frac{R_2}{R_2 + j\omega L} \right|^2 = \frac{R_2^2}{R_2^2 + \omega^2 L^2}$$

$$H_{\text{dB}}(\omega) = 10 \lg |\underline{H}(j\omega)|^2 = 10 \lg \left(\frac{R_2^2}{R_2^2 + \omega^2 L^2} \right)$$

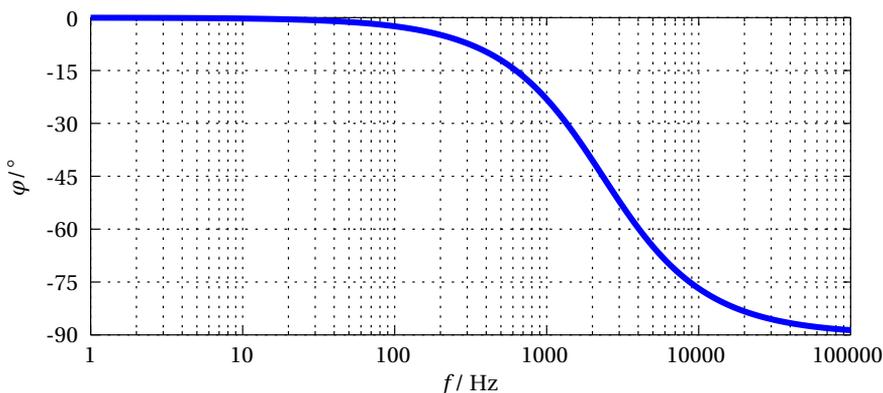
$$\varphi(\omega) = \arg \{ \underline{H}(j\omega) \} = \arctan \left(\frac{-\omega L R_2}{R_2^2} \right) = -\arctan(\omega L / R_2)$$

Der Phasengang kann hier durch die arctan-Funktion ohne Fallunterscheidung ausgedrückt werden, da der Realteil der Übertragungsfunktion stets positiv ist. Darüber hinaus ist auch zu erkennen, dass der Imaginärteil der Übertragungsfunktion nicht positiv ist. Somit liegt die Phase im Bereich $-90^\circ \leq \varphi(\omega) \leq 0^\circ$.

Amplitudengang



Phasengang



d) Abfall der Amplitude pro Dekade im Sperrbereich

Aus dem Diagramm des Amplitudengangs können wir unmittelbar entnehmen, dass die logarithmierte Amplitude im Sperrbereich, also ab ca. 5 kHz, praktisch linear mit 20 dB/Dekade abfällt. Um dies auch mathematisch zu überprüfen, betrachten wir die Differenz

$$H_{\text{dB}}(\omega_2) - H_{\text{dB}}(\omega_1) = 10 \lg \left(\frac{|H(j\omega_2)|^2}{|H(j\omega_1)|^2} \right) \quad \text{mit } \omega_2 > \omega_1 \gg \omega_g$$

und erhalten

$$\begin{aligned} H_{\text{dB}}(\omega_2) - H_{\text{dB}}(\omega_1) &= 10 \lg \left(\frac{R_2^2 + \omega_1^2 L^2}{R_2^2 + \omega_2^2 L^2} \right) = 10 \lg \left(\frac{R_2^2 / L^2 + \omega_1^2}{R_2^2 / L^2 + \omega_2^2} \right) \\ &\approx 10 \lg \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \right) = 20 \lg \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \end{aligned}$$

für $\omega_1, \omega_2 \gg R_2/L$.

Speziell für $\omega_2 = 10 \cdot \omega_1$, also eine Dekade, ergibt sich hier

$$H_{\text{dB}}(\omega_2) - H_{\text{dB}}(\omega_1) = 20 \lg \left(\frac{1}{10} \right) = -20 \lg(10) = -20 \text{ dB} .$$

Octave-Datei: loesung_04_01.m

```

% Lösung der Übungsaufgabe 4.1

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
R1 = 600; % Ohm
R2 = 1e3; % Ohm
L = 68e-3; % H
fmin = 1; % Hz
fmax = 100e3; % Hz
M = 50; % Stützstellen pro Dekade
disp("Vorgaben");
disp([" R1 = (",num2str(R1),") Ohm"]);
disp([" R2 = (",num2str(R2),") Ohm"]);
disp([" L = (",num2str(L*1e3),") mH"]);
disp(["fmin = ",num2str(fmin), " Hz"]);
disp(["fmax = ",num2str(fmax*1e-3), " kHz"]);
disp(" ");

% Frequenzachse erstellen
flgmin = log10(fmin);
flgmax = log10(fmax);
N = round((flgmax-flgmin)*M);
n = 0:N-1;
flg = flgmin+n*(flgmax-flgmin)/(N-1);
f = 10.^(flg);

% Berechnung der Übertragungsfunktion
H = R2./(R2+j*2*pi*f*L); % Übertragungsfunktion
HdB = 20*log10(abs(H)); % Amplitudengang
phi = angle(H)*180/pi; % Phasengang

% Darstellungsgrenzen der Diagramme
Xmin = 0;
Xmax = 1;
Ymin = -1;
Ymax = 0;
HdBmax = 0; % dB
HdBmin = -40; % dB
phimax = 0; % Grad
phimin = -90; % Grad

```

Octave-Datei: loesung_04_01.m (Fortsetzung)

```
% Darstellung des Nyquist-Diagramms
hFig1 = figure("Name", "Nyquist-Diagramm");
hPlot1 = plot(real(H), imag(H), "r");
axis([Xmin, Xmax, Ymin, Ymax]);
axis square;
grid on;
title("\b Nyquist-Diagramm", "FontSize", 14);
xlabel("Re\{H\}", "FontSize", 12);
ylabel("Im\{H\}", "FontSize", 12);

% Darstellung des Amplitudengangs
hFig2 = figure("Name", "Amplitudengang");
hPlot2 = semilogx(f, HdB, "r");
axis([fmin, fmax, HdBmin, HdBmax]);
grid on;
title("\b Amplitudengang", "FontSize", 14);
xlabel("f / Hz", "FontSize", 12);
ylabel("20lg|H| / dB", "FontSize", 12);

% Darstellung des Phasengangs
hFig3 = figure("Name", "Phasengang");
hPlot3 = semilogx(f, phi, "b");
axis([fmin, fmax, phimin, phimax]);
grid on;
title("\b Phasengang", "FontSize", 14);
xlabel("f / Hz", "FontSize", 12);
ylabel("arg\{H\} / °", "FontSize", 12);
```

Übung 4.2 Bode- und Nyquist-Diagramm (Tiefpassfilter 2. Ordnung)

Das Übertragungsverhalten des in Bild 4.8 dargestellten Tiefpassfilters 2. Ordnung soll im Frequenzbereich $1 \text{ Hz} \leq f \leq 100 \text{ kHz}$ dargestellt werden. Die Übertragungsfunktion ist durch

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)} = \frac{R_2}{R_2(1 - \omega^2 LC) + j\omega L}$$

gegeben.

- Erzeugen Sie den Vektor der Frequenzstützstellen. Ordnen Sie dabei die Stützstellen logarithmisch mit 50 Werten pro Dekade an.
- Stellen Sie die Übertragungsfunktion in einem Nyquist-Diagramm dar.
- Berechnen Sie Amplitudengang und Phasengang und stellen Sie diese in einem Bode-Diagramm dar.
- Ermitteln Sie anhand des Amplitudengangs den Abfall der Amplitude pro Dekade im Sperrbereich und vergleichen Sie diesen Wert mit dem Ergebnis der Übung 4.1.

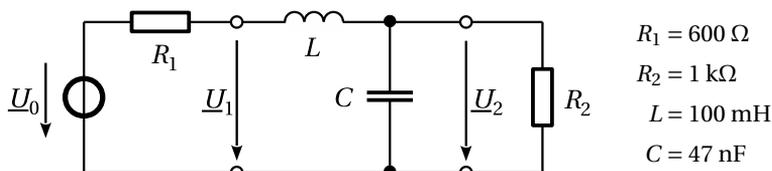


Bild 4.8 Tiefpassfilter 2. Ordnung (Seite 136)

Lösung der Übungsaufgabe 4.2 (Seite 150)

a) Logarithmische Anordnung der Frequenzstützstellen

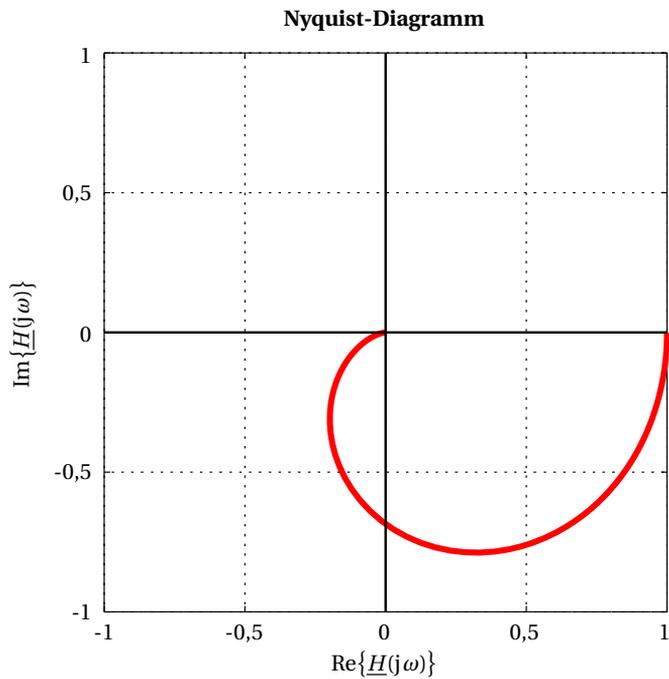
Die Vorgehensweise ist in der Lösung der Übung 4.1 dargestellt.

b) Nyquist-Diagramm

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)} = \frac{R_2}{R_2(1 - \omega^2 LC) + j\omega L}$$

$$\operatorname{Re}\{\underline{H}(j\omega)\} = \frac{R_2^2(1 - \omega^2 LC)}{R_2^2(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\operatorname{Im}\{\underline{H}(j\omega)\} = \frac{-\omega LR_2}{R_2^2(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2}$$



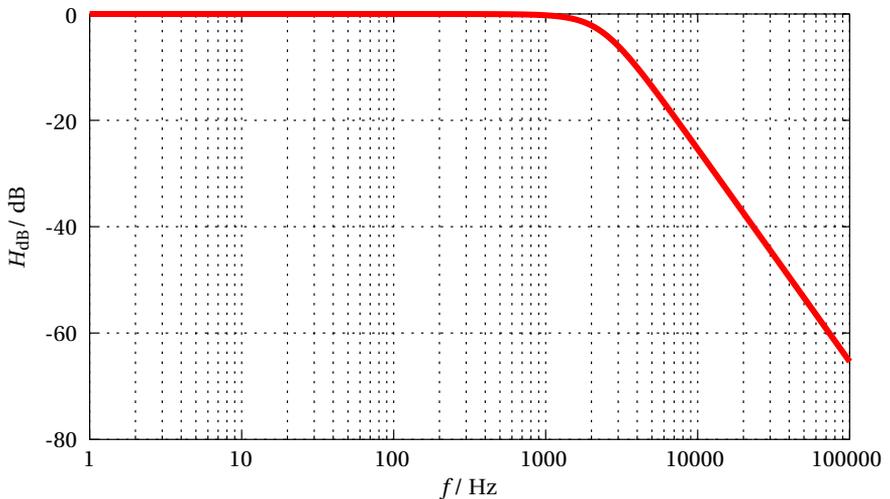
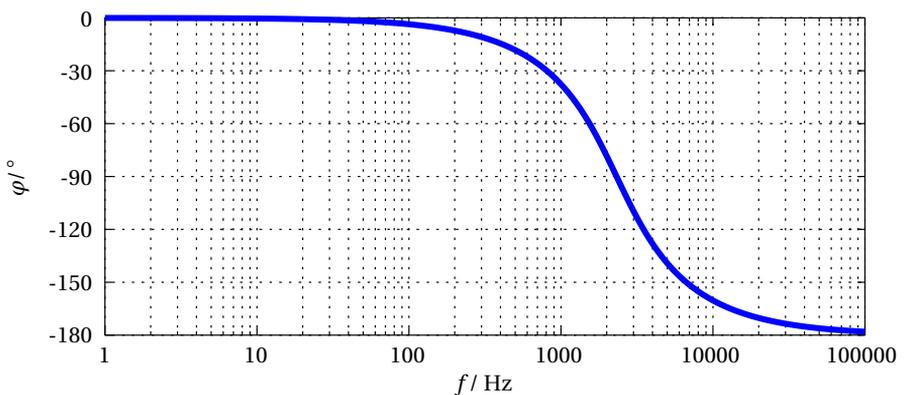
c) Amplituden- und Phasengang

$$|\underline{H}(j\omega)|^2 = \left| \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)} \right|^2 = \frac{R_2^2}{R_2^2(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2}$$

$$H_{\text{dB}}(\omega) = 10 \lg |\underline{H}(j\omega)|^2 = 10 \lg \left(\frac{R_2^2}{R_2^2(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2} \right)$$

$$\varphi(\omega) = \arg \{ \underline{H}(j\omega) \} = \begin{cases} \arctan \left(\frac{-\omega L}{R_2(1 - \omega^2 LC)} \right) & \text{für } \omega < \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \arctan \left(\frac{-\omega L}{R_2(1 - \omega^2 LC)} \right) + \pi & \text{sonst} \end{cases}$$

Da der Realteil der Übertragungsfunktion für $\omega > 1/\sqrt{LC}$ negativ wird, ist hier bei der Anwendung der arctan-Funktion eine Fallunterscheidung erforderlich.

Amplitudengang**Phasengang**

d) Abfall der Amplitude pro Dekade im Sperrbereich

Aus dem Diagramm des Amplitudengangs können wir unmittelbar entnehmen, dass die logarithmierte Amplitude im Sperrbereich, also ab ca. 5 kHz, praktisch linear mit 40 dB/Dekade abfällt. Wir betrachten nun die Differenz

$$H_{\text{dB}}(\omega_2) - H_{\text{dB}}(\omega_1) = 10 \lg \left(\frac{|H(j\omega_2)|^2}{|H(j\omega_1)|^2} \right) \quad \text{mit } \omega_2 > \omega_1 \gg \omega_g$$

und erhalten

$$\begin{aligned} H_{\text{dB}}(\omega_2) - H_{\text{dB}}(\omega_1) &= 10 \lg \left(\frac{R_2^2 (1 - \omega_1^2 LC)^2 + \omega_1^2 L^2}{R_2^2 (1 - \omega_2^2 LC)^2 + \omega_2^2 L^2} \right) \\ &= 10 \lg \left(\frac{\omega_1^4 L^2 C^2 + \omega_1^2 (L^2 / R_2^2 - 2LC) + 1}{\omega_2^4 L^2 C^2 + \omega_2^2 (L^2 / R_2^2 - 2LC) + 1} \right) \\ &\approx 10 \lg \left(\frac{\omega_1^4}{\omega_2^4} \right) = 40 \lg \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \end{aligned}$$

für $\omega_1, \omega_2 \gg 1/\sqrt{LC}$.

Speziell für $\omega_2 = 10 \cdot \omega_1$, also eine Dekade, ergibt sich hier

$$H_{\text{dB}}(\omega_2) - H_{\text{dB}}(\omega_1) = 40 \lg \left(\frac{1}{10} \right) = -40 \lg(10) = -40 \text{ dB} .$$

Der Amplitudenabfall im Sperrbereich hängt offensichtlich von der Filterordnung n ab. Aufgrund der Struktur der Übertragungsfunktion (gebrochen rationale Funktion n -ten Grades) können wir somit auf einen Amplitudenabfall von

$$H_{\text{dB}}(\omega_2) - H_{\text{dB}}(\omega_1) = -n \cdot 20 \text{ dB}$$

pro Dekade bei einem Filter vom Grad n schließen.

Octave-Datei: loesung_04_02.m

```

% Lösung der Übungsaufgabe 4.2

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
R1 = 600; % Ohm
R2 = 1e3; % Ohm
L = 100e-3; % H
C = 47e-9; % F
fmin = 1; % Hz
fmax = 100e3; % Hz
M = 50; % Stützstellen pro Dekade
disp("Vorgaben");
disp([" R1 = (",num2str(R1),") Ohm"]);
disp([" R2 = (",num2str(R2),") Ohm"]);
disp([" L = (",num2str(L*1e3),") mH"]);
disp([" C = (",num2str(C*1e9),") nF"]);
disp(["fmin = ",num2str(fmin)," Hz"]);
disp(["fmax = ",num2str(fmax*1e-3)," kHz"]);
disp(" ");

% Frequenzachse erstellen
flgmin = log10(fmin);
flgmax = log10(fmax);
N = round((flgmax-flgmin)*M);
n = 0:N-1;
flg = flgmin+n*(flgmax-flgmin)/(N-1);
f = 10.^(flg);

% Berechnung der Übertragungsfunktion
H = R2./(R2*(1-L*C*(2*pi*f).^2)+j*2*pi*f*L); % Übertragungsfunktion
HdB = 20*log10(abs(H)); % Amplitudengang
phi = angle(H)*180/pi; % Phasengang

% Darstellungsgrenzen der Diagramme
Xmin = -1;
Xmax = 1;
Ymin = -1;
Ymax = 1;
HdBmax = 0; % dB
HdBmin = -80; % dB
phimax = 0; % Grad
phimin = -180; % Grad

```

Octave-Datei: loesung_04_02.m (Fortsetzung)

```
% Darstellung des Nyquist-Diagramms
hFig1 = figure("Name", "Nyquist-Diagramm");
hPlot1 = plot(real(H), imag(H), "r");
axis([Xmin, Xmax, Ymin, Ymax]);
axis square;
grid on;
title("\b Nyquist-Diagramm", "FontSize", 14);
xlabel("Re\{H\}", "FontSize", 12);
ylabel("Im\{H\}", "FontSize", 12);

% Darstellung des Amplitudengangs
hFig2 = figure("Name", "Amplitudengang");
hPlot2 = semilogx(f, HdB, "r");
axis([fmin, fmax, HdBmin, HdBmax]);
grid on;
title("\b Amplitudengang", "FontSize", 14);
xlabel("f / Hz", "FontSize", 12);
ylabel("20lg|H| / dB", "FontSize", 12);

% Darstellung des Phasengangs
hFig3 = figure("Name", "Phasengang");
hPlot3 = semilogx(f, phi, "b");
axis([fmin, fmax, phimin, phimax]);
grid on;
title("\b Phasengang", "FontSize", 14);
xlabel("f / Hz", "FontSize", 12);
ylabel("arg\{H\} / \text{\textcircled{0}}", "FontSize", 12);
```

Übung 4.3 Übertragungsfunktion (Hochpassfilter 1. Ordnung)

Das Übertragungsverhalten des in Bild 4.10 dargestellten Hochpassfilters 1. Ordnung soll in Bezug auf die Quellspannung U_0 untersucht werden.

- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\underline{H}_0(j\omega) = \underline{U}_2(j\omega)/\underline{U}_0(j\omega)$.
- Geben Sie $\underline{H}_0(0)$ und $\underline{H}_0(\infty)$ an.
- Berechnen Sie die Grenzfrequenz des Filters. Wie groß ist die Dämpfung und wie groß ist die Phase bei der Grenzfrequenz?
- Wie ist hier der Begriff „3-dB-Grenzfrequenz“ zu interpretieren?
- Stellen Sie Dämpfung und Phase im Frequenzbereich $0 \leq f \leq 10$ kHz dar. (Die Frequenzachse soll linear skaliert werden.)

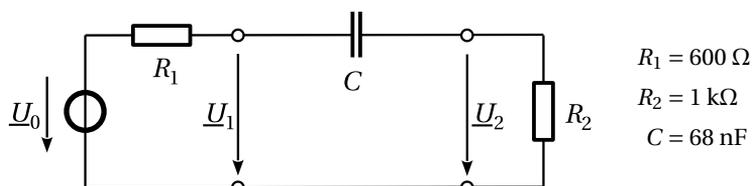


Bild 4.10 Hochpassfilter 1. Ordnung (Seite 138)

Lösung der Übungsaufgabe 4.3 (Seite 150)

a) Übertragungsfunktion

$$\underline{H}_0(j\omega) = \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_0(j\omega)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + 1/(j\omega C)} = \frac{j\omega R_2 C}{1 + j\omega(R_1 + R_2)C}$$

b) Übertragungsverhalten bei $\omega = 0$ und bei $\omega = \infty$

$$\begin{aligned} \underline{H}_0(0) &= 0, \text{ da } \underline{U}_2 = 0 \text{ für } \omega = 0 \\ \underline{H}_0(\infty) &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0,625, \text{ da } \underline{U}_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \underline{U}_0 \text{ für } \omega = \infty \end{aligned}$$

c) Bestimmung der Grenzfrequenz

Wir stellen die Übertragungsfunktion zunächst in kartesischer Form dar.

$$\underline{H}_0(j\omega) = \frac{j\omega R_2 C}{1 + j\omega(R_1 + R_2)C} = \frac{\omega^2 R_2 (R_1 + R_2) C^2 + j\omega R_2 C}{1 + \omega^2 (R_1 + R_2)^2 C^2}$$

Beide Komponenten sind für positive Frequenzen stets positiv. Bei der Grenzfrequenz ω_g soll die Phase der Übertragungsfunktion somit $+45^\circ$ betragen, d. h., Real- und Imaginärteil der Übertragungsfunktion sollen gleich groß sein.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\underline{H}_0(j\omega)\} &= \frac{\omega^2 R_2 (R_1 + R_2) C^2}{1 + \omega^2 (R_1 + R_2)^2 C^2} \\ \operatorname{Im}\{\underline{H}_0(j\omega)\} &= \frac{\omega R_2 C}{1 + \omega^2 (R_1 + R_2)^2 C^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\underline{H}_0(j\omega_g)\} &= \operatorname{Im}\{\underline{H}_0(j\omega_g)\} \\ \omega_g^2 R_2 (R_1 + R_2) C^2 &= \omega_g R_2 C \end{aligned}$$

$$\omega_g = \frac{R_2 C}{R_2 (R_1 + R_2) C^2} = \frac{1}{(R_1 + R_2) C}$$

Für die Grenzfrequenz erhalten wir dann

$$f_g = \frac{1}{2\pi(R_1 + R_2)C} = 1462,8 \text{ Hz.}$$

Nun bestimmen wir die Dämpfung bei der Grenzfrequenz.

$$\begin{aligned} |\underline{H}_0(j\omega_g)|^2 &= \frac{\omega_g^2 R_2^2 C^2}{1 + \omega_g^2 (R_1 + R_2)^2 C^2} = \frac{\frac{R_2^2 C^2}{(R_1 + R_2)^2 C^2}}{1 + \frac{(R_1 + R_2)^2 C^2}{(R_1 + R_2)^2 C^2}} = \frac{R_2^2}{2(R_1 + R_2)^2} = 0,19531 \\ A(\omega_g) &= -10 \lg\left(|\underline{H}_0(j\omega_g)|^2\right) = -10 \lg\left(\frac{R_2^2}{2(R_1 + R_2)^2}\right) = 7,0927 \text{ dB} \end{aligned}$$

d) Interpretation des Begriffs „3-dB-Grenzfrequenz“

Wir betrachten zunächst die Dämpfung bei der Kreisfrequenz $\omega = \infty$.

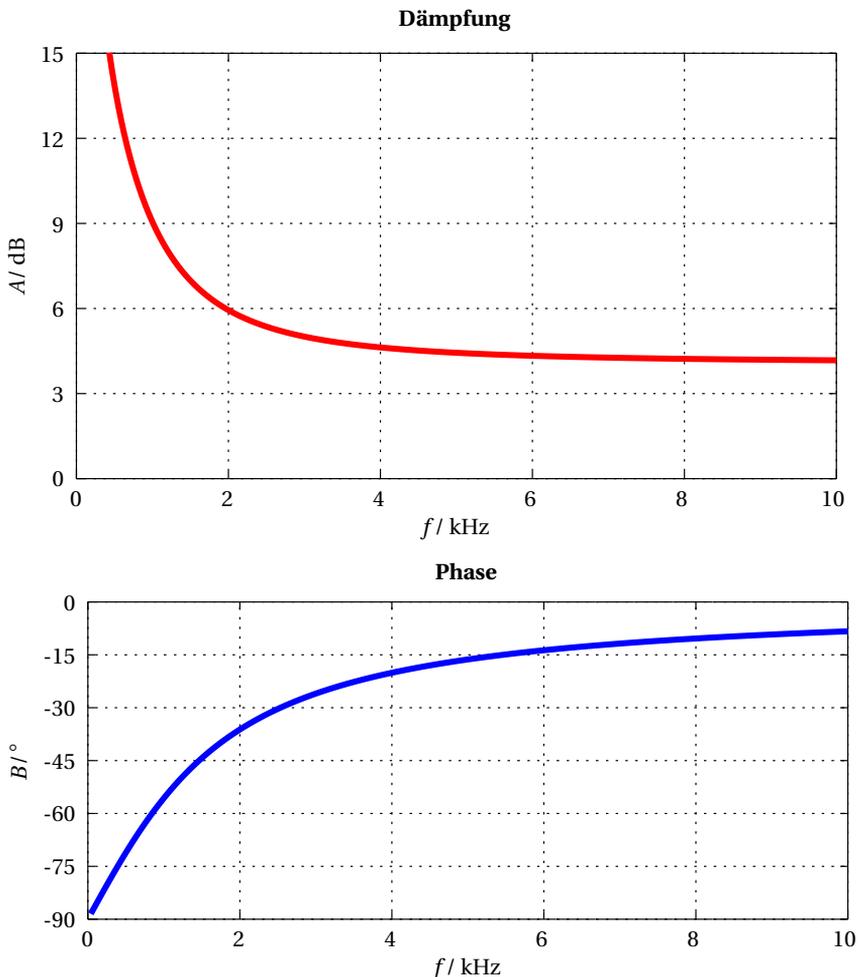
$$A(\infty) = -10 \lg(|\underline{H}_0(\infty)|^2) = -10 \lg\left(\frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}\right) = 4,0824 \text{ dB}$$

Bei dieser Frequenz tritt die minimale Dämpfung auf, d. h., der Betrag der Übertragungsfunktion nimmt dort sein Maximum ein. Beziehen wir die Dämpfung auf die maximale Amplitude des Ausgangssignals, so erhalten wir bei der Grenzfrequenz

$$A(\omega_g) - A(\infty) = 7,0927 \text{ dB} - 4,0824 \text{ dB} = 3,0103 \text{ dB} .$$

Die 3-dB-Grenzfrequenz ist die Frequenz, bei der das Ausgangssignal um 3 dB gegenüber dem Maximum gedämpft ist. Bei einem Hochpassfilter tritt dieses Maximum bei hohen Frequenzen auf.

e) Dämpfung und Phase



Bei der Kreisfrequenz $\omega = 0$ ist $\underline{H}_0 = 0$. Die Phase existiert an dieser Stelle nicht.

Octave-Datei: loesung_04_03.m

```

% Lösung der Übungsaufgabe 4.3

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
R1 = 600; % Ohm
R2 = 1e3; % Ohm
C = 68e-9; % F
fmin = 0; % Hz
fmax = 10e3; % Hz
disp("Vorgaben");
disp([" R1 = ", num2str(R1), " Ohm"]);
disp([" R2 = ", num2str(R2), " Ohm"]);
disp([" C = ", num2str(C*1e9), " nF"]);
disp([" fmin = ", num2str(fmin), " Hz"]);
disp([" fmax = ", num2str(fmax*1e-3), " kHz"]);
disp(" ");

% Frequenzachse erstellen
N = 256;
n = 0:N-1;
f = fmin+n*(fmax-fmin)/(N-1);

% Berechnung der Übertragungsfunktion
H = j*2*pi*f*R2*C./(1+j*2*pi*f*(R1+R2)*C);
A = -20*log10(abs(H));
B = -angle(H)*180/pi;
B(1) = NaN; % Keine Phase, wenn H=0!

% Berechnung der Grenzfrequenz
fg = 1/(2*pi*(R1+R2)*C);
Hg = j*2*pi*fg*R2*C./(1+j*2*pi*fg*(R1+R2)*C);
Ag = -20*log10(abs(Hg));
Bg = angle(Hg)*180/pi;
disp("Grenzfrequenz (Dämpfung und Phase)");
disp([" fg = ", num2str(fg), " Hz"]);
disp([" Ag = ", num2str(Ag), " dB"]);
disp([" Bg = ", num2str(Bg), "°"]);
disp(" ");

% Minimum der Dämpfung bei unendlich hoher Frequenz
Amin = -20*log10(R2/(R1+R2));
disp("Minimum der Dämpfung");
disp([" Amin = ", num2str(Amin), " dB"]);
disp([" Ag-Amin = ", num2str(Ag-Amin), " dB"]);
disp(" ");

```

Octave-Datei: loesung_04_03.m (Fortsetzung)

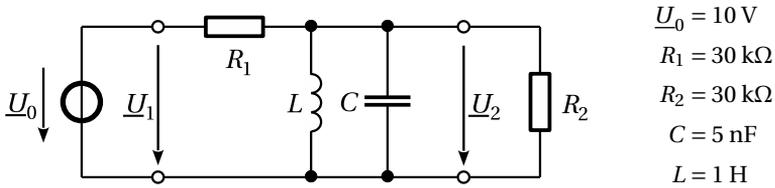
```
% Darstellungsgrenzen der Diagramme
Amin = 0; % dB
Amax = 15; % dB
Bmin = -90; % Grad
Bmax = 0; % Grad

% Darstellung der Dämpfung
hFig1 = figure("Name","Dämpfung");
hPlot1 = plot(f*1e-3,A,"r");
axis([fmin*1e-3,fmax*1e-3,Amin,Amax]);
grid on;
title("\bf Dämpfung","FontSize",14);
xlabel("f / kHz","FontSize",12);
ylabel("A / dB","FontSize",12);

% Darstellung der Phase
hFig2 = figure("Name","Phase");
hPlot2 = plot(f*1e-3,B,"b");
axis([fmin*1e-3,fmax*1e-3,Bmin,Bmax]);
grid on;
title("\bf Phasengang","FontSize",14);
xlabel("f / kHz","FontSize",12);
ylabel("B / °","FontSize",12);
```

Übung 4.4 Bandpassfilter

Das abgebildete Bandpassfilter soll analysiert werden.



- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\underline{H}(j\omega) = \underline{U}_2(j\omega) / \underline{U}_1(j\omega)$.
- Bei welcher Frequenz wird $|\underline{H}(j\omega)|$ maximal?
- Ermitteln Sie die Grenzfrequenzen und die Bandbreite des Filters.
- Stellen Sie Dämpfung und Phase im Frequenzbereich $0 \leq f \leq 10 \text{ kHz}$ dar.
- Stellen Sie das Bode-Diagramm im Frequenzbereich $1 \text{ Hz} \leq f \leq 100 \text{ kHz}$ dar.
- Stellen Sie das Nyquist-Diagramm dar.

Lösung der Übungsaufgabe 4.4 (Seite 151)

a) Übertragungsfunktion

Wir berechnen zunächst die Impedanz der Parallelschaltung aus R_2 , L und C .

$$\underline{Z} = R_2 \parallel j\omega L \parallel \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C} = \frac{j\omega R_2 L}{R_2(1 - \omega^2 LC) + j\omega L}$$

Zur Berechnung der Übertragungsfunktion betrachten wir den Spannungsteiler aus R_1 und \underline{Z} .

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)} = \frac{\underline{Z}}{R_1 + \underline{Z}} = \frac{\frac{j\omega R_2 L}{R_2(1 - \omega^2 LC) + j\omega L}}{R_1 + \frac{j\omega R_2 L}{R_2(1 - \omega^2 LC) + j\omega L}}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega R_2 L}{R_1 R_2(1 - \omega^2 LC) + j\omega(R_1 + R_2)L}$$

b) Maximum von $|\underline{H}(j\omega)|$

Wir betrachten das Betragsquadrat der Übertragungsfunktion.

$$|\underline{H}(j\omega)|^2 = \underline{H}(j\omega) \cdot \underline{H}^*(j\omega) = \frac{\omega^2 R_2^2 L^2}{R_1^2 R_2^2 (1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 (R_1 + R_2)^2 L^2}$$

Bei der Kreisfrequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 2250,8 \text{ Hz}$$

wird der Nenner minimal und damit der Betrag der Übertragungsfunktion maximal.

$$|\underline{H}(j\omega_0)|^2 = \frac{\omega_0^2 R_2^2 L^2}{\omega_0^2 (R_1 + R_2)^2 L^2} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad |\underline{H}(j\omega_0)| = \frac{1}{2}$$

c) Grenzfrequenzen

Wir stellen die Übertragungsfunktion zunächst in kartesischer Form dar.

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\omega^2 R_2 (R_1 + R_2) L^2 + j\omega R_1 R_2^2 (1 - \omega^2 LC) L}{R_1^2 R_2^2 (1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 (R_1 + R_2)^2 L^2}$$

Jetzt suchen wir die Frequenzen, bei denen die Phase der Übertragungsfunktion $\pm 45^\circ$ beträgt, d. h., der Realteil der Übertragungsfunktion soll gleich dem positiven oder gleich dem negativen Imaginärteil sein. Dabei erhalten wir quadratische Gleichungen. Für die Kenngröße *Grenzfrequenz* betrachten wir nur die positive Lösung.

untere Grenzfrequenz: $\operatorname{Re}\{\underline{H}(j\omega_{\text{gu}})\} = +\operatorname{Im}\{\underline{H}(j\omega_{\text{gu}})\} \Leftrightarrow B = +45^\circ, \omega_{\text{gu}} < \omega_0$

$$\omega_{\text{gu}}^2 R_2 (R_1 + R_2) L^2 = +\omega_{\text{gu}} R_1 R_2^2 (1 - \omega_{\text{gu}}^2 LC) L$$

$$\omega_{\text{gu}}^2 R_1 R_2 LC + \omega_{\text{gu}} (R_1 + R_2) L = R_1 R_2$$

$$\omega_{\text{gu}} = +\sqrt{\frac{1}{LC} + \left(\frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2 C}\right)^2} - \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2 C}$$

$$f_{\text{gu}} = \frac{\omega_{\text{gu}}}{2\pi} = 1427,3 \text{ Hz}$$

obere Grenzfrequenz: $\operatorname{Re}\{\underline{H}(j\omega_{\text{go}})\} = -\operatorname{Im}\{\underline{H}(j\omega_{\text{go}})\} \Leftrightarrow B = -45^\circ, \omega_{\text{go}} > \omega_0$

$$\omega_{\text{go}}^2 R_2 (R_1 + R_2) L^2 = -\omega_{\text{go}} R_1 R_2^2 (1 - \omega_{\text{go}}^2 LC) L$$

$$\omega_{\text{go}}^2 R_1 R_2 LC - \omega_{\text{go}} (R_1 + R_2) L = R_1 R_2$$

$$\omega_{\text{go}} = +\sqrt{\frac{1}{LC} + \left(\frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2 C}\right)^2} + \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2 C}$$

$$f_{\text{go}} = \frac{\omega_{\text{go}}}{2\pi} = 3549,4 \text{ Hz}$$

Für die Bandbreite des Bandpassfilters erhalten wir dann

$$B = f_{\text{go}} - f_{\text{gu}} = \frac{\omega_{\text{go}} - \omega_{\text{gu}}}{2\pi} = \frac{R_1 + R_2}{2\pi R_1 R_2 C} = 2122,1 \text{ Hz}.$$

Nun suchen wir die *3-dB-Grenzfrequenzen*, d. h., die Frequenzen, bei denen die Amplitude der Ausgangsspannung um 3 dB bzw. den Faktor $1/\sqrt{2}$ gegenüber dem Maximalwert abfällt. Es ist allerdings einfacher das Betragsquadrat zu betrachten. Dieses fällt bei den Grenzfrequenzen um den Faktor $1/2$ ab. Somit ist die Gleichung

$$\begin{aligned} |\underline{H}(j\omega_g)|^2 &= \frac{1}{2} |\underline{H}(j\omega_0)|^2 \\ \frac{\omega_g^2 R_2^2 L^2}{R_1^2 R_2^2 (1 - \omega_g^2 LC)^2 + \omega_g^2 (R_1 + R_2)^2 L^2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} \end{aligned}$$

zu lösen. Wir erhalten eine quadratische Gleichung in ω_g^2

$$\omega_g^4 R_1^2 R_2^2 L^2 C^2 - \omega_g^2 \left((R_1 + R_2)^2 L^2 + 2R_1^2 R_2^2 LC \right) + R_1^2 R_2^2 = 0$$

mit der Lösung

$$\omega_g = \pm \sqrt{\frac{(R_1 + R_2)^2}{2R_1^2 R_2^2 C^2} + \frac{1}{LC}} \pm \sqrt{\left(\frac{(R_1 + R_2)^2}{2R_1^2 R_2^2 C^2} + \frac{1}{LC} \right)^2 - \frac{1}{L^2 C^2}}.$$

Die Gleichung liefert vier Lösungen, von denen die beiden positiven Werte

$$f_{\text{gu}} = \frac{\omega_{\text{gu}}}{2\pi} = 1427,3 \text{ Hz}$$

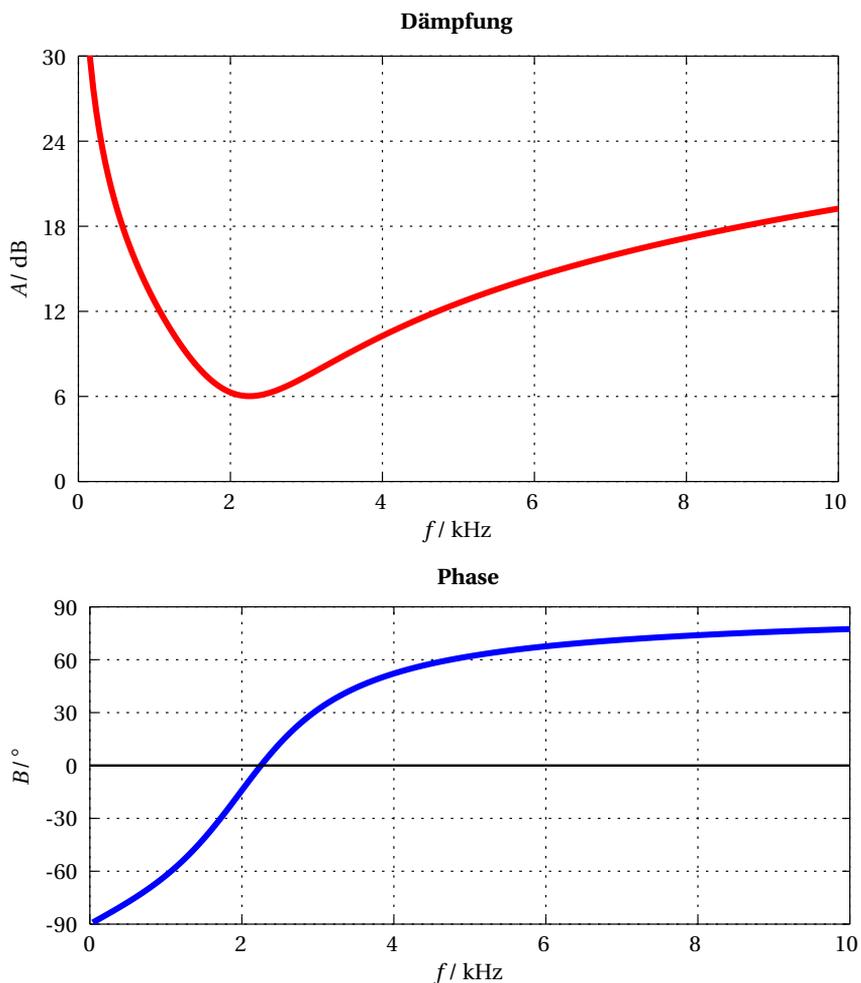
$$f_{\text{go}} = \frac{\omega_{\text{go}}}{2\pi} = 3549,4 \text{ Hz}$$

mit den eingangs gefundenen Lösungen übereinstimmen. Die Phase beträgt bei den 3-dB-Grenzfrequenzen dieses Filters also $\pm 45^\circ$.

d) Dämpfung und Phase

$$A(\omega) = -20 \lg |H(j\omega)|$$

$$B(\omega) = -\arg \{H(j\omega)\}$$

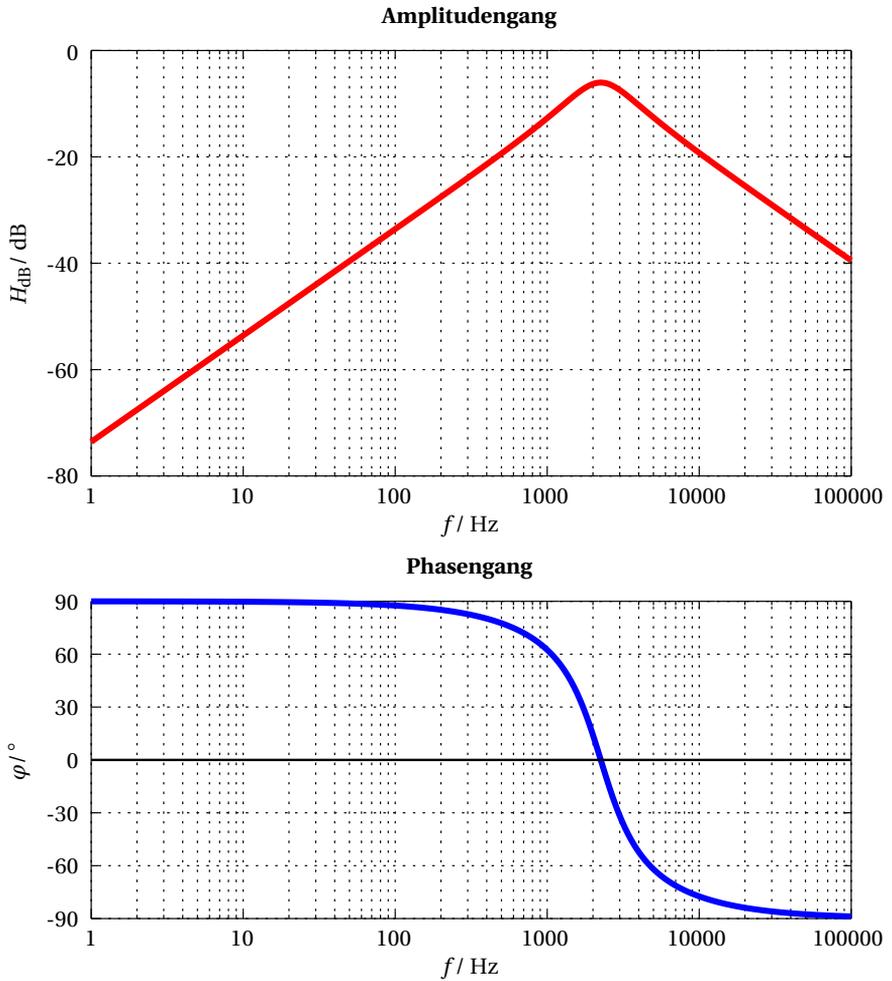


Bei der Kreisfrequenz $\omega = 0$ ist $\underline{H} = 0$. Die Phase existiert an dieser Stelle nicht.

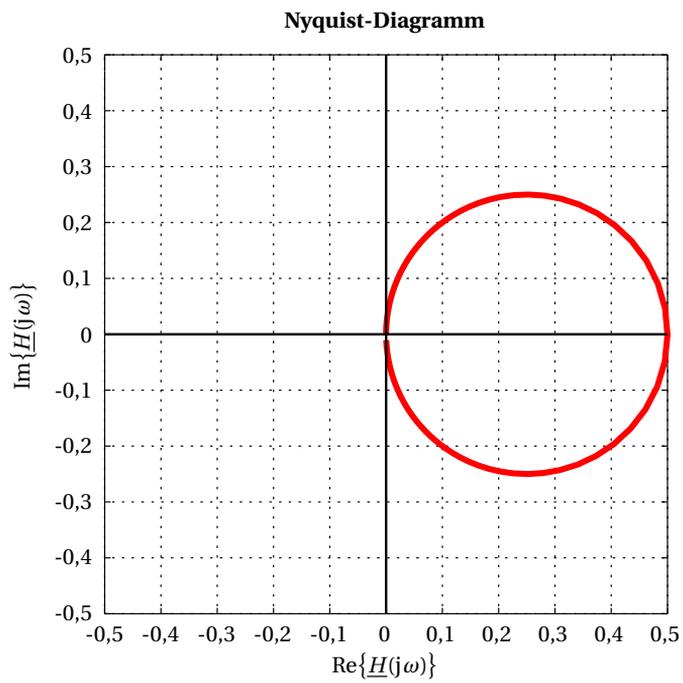
e) Bode-Diagramm

$$H_{\text{dB}}(\omega) = 20 \lg |H(j\omega)|$$

$$\varphi(\omega) = \arg \{H(j\omega)\}$$



f) Nyquist-Diagramm



Octave-Datei: loesung_04_04.m

```
% Lösung der Übungsaufgabe 4.4

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
R1 = 30e3; % Ohm
R2 = 30e3; % Ohm
C = 5e-9; % F
L = 1; % H
disp("Vorgaben");
disp([" R1 = ", num2str(R1*1e-3), " kOhm"]);
disp([" R2 = ", num2str(R2*1e-3), " kOhm"]);
disp([" C = ", num2str(C*1e9), " nF"]);
disp([" L = ", num2str(L), " H"]);
disp(" ");

% Resonanzfrequenz
f0 = 1/(2*pi*sqrt(L*C));
disp("Resonanzfrequenz");
disp([" f0 = ", num2str(f0), " Hz"]);
disp(" ");

% Grenzfrequenzen (+/-45°)
fgu = roots([R1*R2*L*C, (R1+R2)*L, -R1*R2])/(2*pi);
fgu = fgu(find(fgu>0));
fgo = roots([R1*R2*L*C, -(R1+R2)*L, -R1*R2])/(2*pi);
fgo = fgo(find(fgo>0));
disp("Grenzfrequenzen (+/-45°)");
disp([" fgu = ", num2str(fgu), " Hz"]);
disp([" fgo = ", num2str(fgo), " Hz"]);
disp([" B = ", num2str(fgo-fgu), " Hz"]);
disp(" ");

% Grenzfrequenzen (-3dB)
fg = roots([(R1*R2*L*C)^2, 0, -(((R1+R2)*L)^2+2*L*C*(R1*R2)^2), ...
           0, (R1*R2)^2])/(2*pi);
fg = sort(fg(find(fg>0)));
disp("3dB-Grenzfrequenzen");
disp([" fgu = ", num2str(fg(1)), " Hz"]);
disp([" fgo = ", num2str(fg(2)), " Hz"]);
disp(" ");
```

Octave-Datei: loesung_04_04.m (Fortsetzung)

```

% Frequenzachse und Frequenzstützstellen
N = 256;
n = 0:N-1;

% Frequenzachse mit äquidistanten Frequenzstützstellen
fmin = 0;      % Hz
fmax = 10e3;   % Hz
f = fmin+n*(fmax-fmin)/(N-1);

% Übertragungsfunktion, Dämpfung und Phase
H = j*2*pi*f*R2*L./(R1*R2*(1-L*C*(2*pi*f).^2)+j*2*pi*f*(R1+R2)*L);
A = -20*log10(abs(H));
B = -angle(H)*180/pi;
B(1) = NaN; % Keine Phase, wenn H=0!

% Darstellungsgrenzen der Diagramme (Ordinate)
Amin = 0;      % dB
Amax = 30;     % dB
Bmin = -90;    % Grad
Bmax = 90;     % Grad

% Darstellung der Dämpfung
hFig1 = figure("Name", "Dämpfung");
hPlot1 = plot(f*1e-3, A, "r");
axis([fmin*1e-3, fmax*1e-3, Amin, Amax]);
grid on;
title("\bf Dämpfung", "FontSize", 14);
xlabel("f / kHz", "FontSize", 12);
ylabel("A / dB", "FontSize", 12);

% Darstellung der Phase
hFig2 = figure("Name", "Phase");
hPlot2 = plot(f*1e-3, B, "b");
axis([fmin*1e-3, fmax*1e-3, Bmin, Bmax]);
grid on;
title("\bf Phase", "FontSize", 14);
xlabel("f / kHz", "FontSize", 12);
ylabel("B / °", "FontSize", 12);

```

Octave-Datei: loesung_04_04.m (Fortsetzung)

```

% Frequenzachse mit logarithmisch angeordneten Frequenzstützstellen
fmin = 1;      % Hz
fmax = 100e3; % Hz
f = 10.^(log10(fmin)+n*(log10(fmax)-log10(fmin))/(N-1));

% Übertragungsfunktion, Amplituden und Phasengang (Bode-Diagramm)
H = j*2*pi*f*R2*L./(R1*R2*(1-L*C*(2*pi*f).^2)+j*2*pi*f*(R1+R2)*L);
HdB = 20*log10(abs(H));
phi = angle(H)*180/pi;

% Darstellungsgrenzen Bode-Diagramm
HdBmax = 0;    % dB
HdBmin = -80;  % dB
phimax = 90;   % Grad
phimin = -90;  % Grad

% Darstellung des Amplitudengangs
hFig3 = figure("Name","Amplitudengang");
hPlot3 = semilogx(f,HdB,"r");
axis([fmin,fmax,HdBmin,HdBmax]);
grid on;
title("\b Amplitudengang","FontSize",14);
xlabel("f / Hz","FontSize",12);
ylabel("20lg|H| / dB","FontSize",12);

% Darstellung des Phasengangs
hFig4 = figure("Name","Phasengang");
hPlot4 = semilogx(f,phi,"b");
axis([fmin,fmax,phimin,phimax]);
grid on;
title("\b Phasengang","FontSize",14);
xlabel("f / Hz","FontSize",12);
ylabel("arg\{H\} / °","FontSize",12);

```

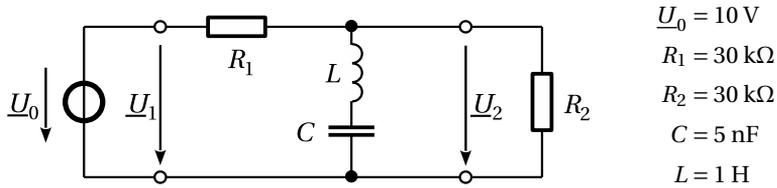
Octave-Datei: loesung_04_04.m (Fortsetzung)

```
% Darstellungsgrenzen Nyquist-Diagramm
Xmin = -0.5;
Xmax = 0.5;
Ymin = -0.5;
Ymax = 0.5;

% Darstellung des Nyquist-Diagramms
hFig5 = figure("Name","Nyquist-Diagramm");
hPlot5 = plot(real(H),imag(H),"r");
axis([Xmin,Xmax,Ymin,Ymax]);
axis square;
grid on;
title("\bf Nyquist-Diagramm","FontSize",14);
xlabel("Re\{H\}","FontSize",12);
ylabel("Im\{H\}","FontSize",12);
```

Übung 4.5 Bandsperrfilter

Das abgebildete Bandsperrfilter soll analysiert werden.



- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\underline{H}(j\omega) = \underline{U}_2(j\omega) / \underline{U}_1(j\omega)$.
- Bei welcher Frequenz wird $|\underline{H}(j\omega)| = 0$?
- Ermitteln Sie die Grenzfrequenzen und die Bandbreite des Filters.
- Stellen Sie Dämpfung und Phase im Frequenzbereich $0 \leq f \leq 10 \text{ kHz}$ dar.
- Stellen Sie das Bode-Diagramm im Frequenzbereich $1 \text{ Hz} \leq f \leq 100 \text{ kHz}$ dar.
- Stellen Sie das Nyquist-Diagramm dar.

Lösung der Übungsaufgabe 4.5 (Seite 151)

a) Übertragungsfunktion

Die Spannung \underline{U}_2 fällt über der Reihenschaltung von Induktivität und Kapazität bzw. dem Widerstand R_2 ab. Diese drei Bauelemente bilden die Impedanz

$$\underline{Z} = R_2 \parallel \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \frac{R_2 \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right)}{R_2 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_2(1 - \omega^2 LC)}{1 - \omega^2 LC + j\omega R_2 C}.$$

Zur Berechnung der Übertragungsfunktion betrachten wir den Spannungsteiler aus R_1 und \underline{Z} .

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)} = \frac{\underline{Z}}{R_1 + \underline{Z}} = \frac{\frac{R_2(1 - \omega^2 LC)}{1 - \omega^2 LC + j\omega R_2 C}}{R_1 + \frac{R_2(1 - \omega^2 LC)}{1 - \omega^2 LC + j\omega R_2 C}} \\ \underline{H}(j\omega) &= \frac{R_2(1 - \omega^2 LC)}{R_1(1 - \omega^2 LC + j\omega R_2 C) + R_2(1 - \omega^2 LC)} = \frac{R_2(1 - \omega^2 LC)}{(R_1 + R_2)(1 - \omega^2 LC) + j\omega R_1 R_2 C} \end{aligned}$$

b) Nullstellen von $|\underline{H}(j\omega)|$

Der Zähler von $\underline{H}(j\omega)$ verschwindet bei der Resonanzkreisfrequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 2250,8 \text{ Hz}.$$

c) Grenzfrequenzen

Wir suchen zunächst die Frequenzen, bei denen das Argument der Übertragungsfunktion den Winkel $\pm 45^\circ$ aufweist. Da der Zähler der Übertragungsfunktion reell ist, genügt es hier die betragsmäßige Gleichheit von Real- und den Imaginärteil des Nenners zu fordern.

$$(R_1 + R_2)(1 - \omega^2 LC) = \pm \omega R_1 R_2 C$$

Dies führt zu der quadratischen Gleichung

$$\omega_g^2 (R_1 + R_2) LC \pm \omega_g R_1 R_2 C = R_1 + R_2$$

mit der Lösung

$$\omega_g = \mp \frac{R_1 R_2}{2(R_1 + R_2)L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} + \left(\frac{R_1 R_2}{2(R_1 + R_2)L} \right)^2}.$$

Die positiven Lösungen des Ausdrucks geben die Grenzfrequenzen an.

$$f_{\text{gu}} = \frac{\omega_{\text{gu}}}{2\pi} = 1354,1 \text{ Hz}$$

$$f_{\text{go}} = \frac{\omega_{\text{go}}}{2\pi} = 3741,4 \text{ Hz}$$

$$B = f_{\text{go}} - f_{\text{gu}} = \frac{R_1 R_2}{2\pi(R_1 + R_2)L} = 2387,3 \text{ Hz}$$

Nun betrachten wir das Betragsquadrat $|\underline{H}(j\omega)|^2$ der Übertragungsfunktion, um die 3-dB-Grenzfrequenzen zu finden.

$$|\underline{H}(j\omega)|^2 = \underline{H}(j\omega) \cdot \underline{H}^*(j\omega) = \frac{R_2^2(1 - \omega^2 LC)^2}{(R_1 + R_2)^2(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R_1^2 R_2^2 C^2}$$

Das Maximum finden wir bei den Kreisfrequenzen $\omega = 0$ und $\omega = \infty$.

$$|\underline{H}(0)|^2 = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}$$

$$|\underline{H}(\infty)|^2 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{R_2^2(1/\omega^2 - LC)^2}{(R_1 + R_2)^2(1/\omega^2 - LC)^2 + R_1^2 R_2^2 C^2/\omega^2} = \frac{-LC R_2^2}{-LC(R_1 + R_2)^2} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}$$

Bei den 3-dB-Grenzfrequenzen fällt das Betragsquadrat auf die Hälfte des Maximums ab.

$$|\underline{H}(j\omega_g)|^2 = \frac{1}{2} |\underline{H}(0)|^2$$

$$\frac{R_2^2(1 - \omega_g^2 LC)^2}{(R_1 + R_2)^2(1 - \omega_g^2 LC)^2 + \omega_g^2 R_1^2 R_2^2 C^2} = \frac{R_2^2}{2(R_1 + R_2)^2}$$

Daraus ergibt sich eine quadratische Gleichung in ω_g^2

$$\omega_g^4 (R_1 + R_2)^2 L^2 C^2 - \omega_g^2 \left(2(R_1 + R_2)^2 LC + R_1^2 R_2^2 C^2 \right) + (R_1 + R_2)^2 = 0$$

mit der Lösung

$$\omega_g = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{R_1^2 R_2^2}{2(R_1 + R_2)^2 L^2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{LC} + \frac{R_1^2 R_2^2}{2(R_1 + R_2)^2 L^2} \right)^2 - \frac{1}{L^2 C^2}}}$$

Die Gleichung liefert vier Lösungen, von denen die beiden positiven Werte

$$f_{gu} = \frac{\omega_{gu}}{2\pi} = 1354,1 \text{ Hz}$$

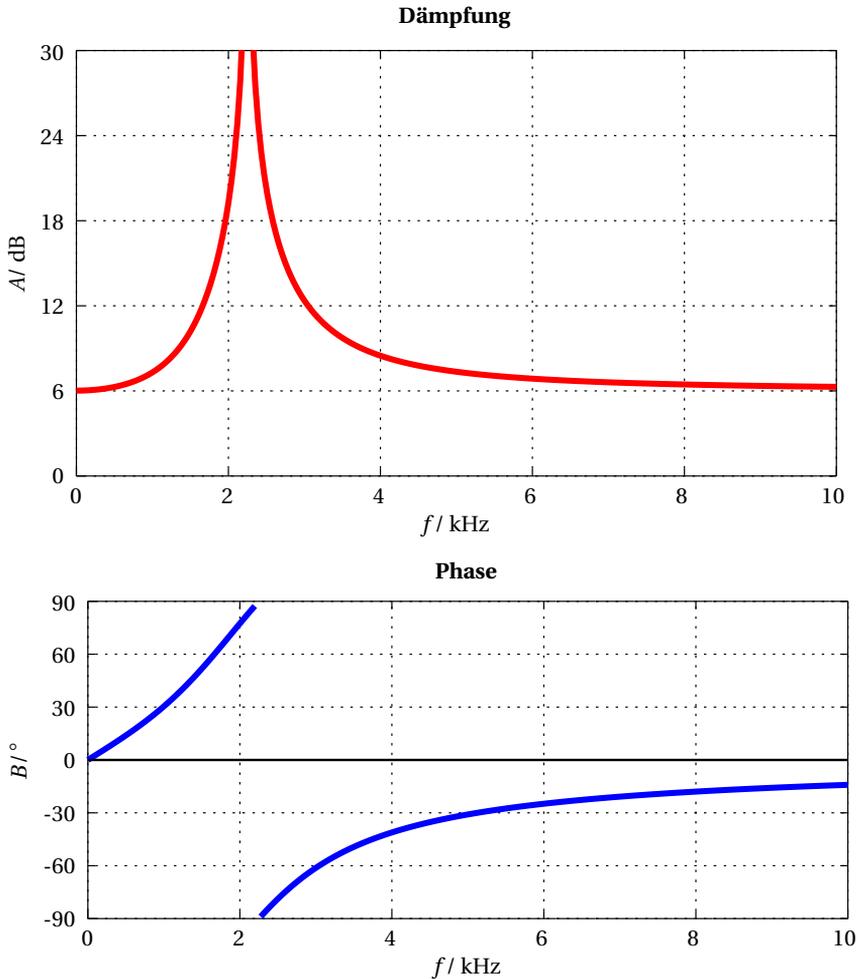
$$f_{go} = \frac{\omega_{go}}{2\pi} = 3741,4 \text{ Hz}$$

mit den eingangs gefundenen Lösungen übereinstimmen. Die Phase beträgt bei den 3-dB-Grenzfrequenzen dieses Filters also $\pm 45^\circ$.

d) Dämpfung und Phase

$$A(\omega) = -20 \lg |H(j\omega)|$$

$$B(\omega) = -\arg \{H(j\omega)\}$$



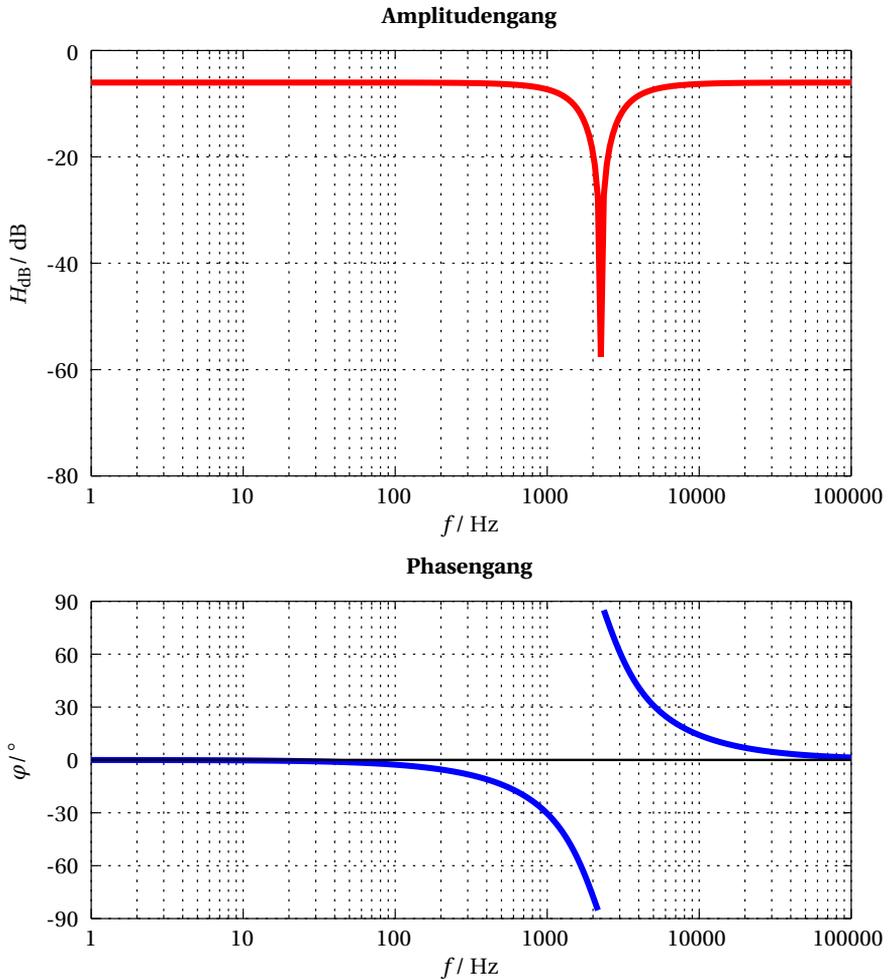
Bei der Kreisfrequenz $\omega = \omega_0$ ist $\underline{H} = 0$. Die Phase existiert an dieser Stelle nicht.

Anmerkung: Bei der Erstellung des Diagramms wird der Wert der Phase an der Nullstelle der Übertragungsfunktion auf NaN (not a number) gesetzt. Dadurch erscheint keine durchgezogene Linie, sondern korrekterweise eine Lücke in der Kurve. Da es unwahrscheinlich ist, dass eine Stützstelle exakt an der Nullstelle liegt, wählen wir die Stützstelle aus, bei der der Betrag der Übertragungsfunktion minimal wird.

e) Bode-Diagramm

$$H_{\text{dB}}(\omega) = 20 \lg |H(j\omega)|$$

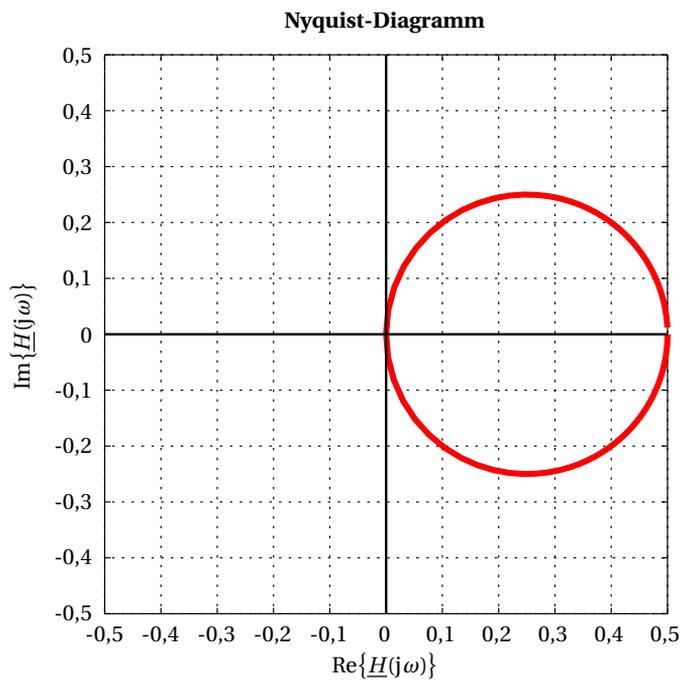
$$\varphi(\omega) = \arg \{H(j\omega)\}$$



Bei der Kreisfrequenz $\omega = \omega_0$ ist $\underline{H} = 0$. Die Phase existiert an dieser Stelle nicht.

Anmerkung: Auch hier setzen wir die Phase $\varphi(\omega)$, genau wie bei der Phase $B(\omega)$ im Aufgabenpunkt d), an der Nullstelle der Übertragungsfunktion auf NaN.

f) Nyquist-Diagramm



Octave-Datei: loesung_04_05.m

```
% Lösung der Übungsaufgabe 4.5

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
R1 = 30e3; % Ohm
R2 = 30e3; % Ohm
C = 5e-9; % F
L = 1; % H
disp("Vorgaben");
disp([" R1 = ",num2str(R1*1e-3)," kOhm"]);
disp([" R2 = ",num2str(R2*1e-3)," kOhm"]);
disp([" C = ",num2str(C*1e9)," nF"]);
disp([" L = ",num2str(L)," H"]);
disp(" ");

% Resonanzfrequenz
f0 = 1/(2*pi*sqrt(L*C));
disp("Resonanzfrequenz");
disp([" f0 = ",num2str(f0)," Hz"]);
disp(" ");

% Grenzfrequenzen (+/-45°)
fgu = roots([(R1+R2)*L*C,R1*R2*C,-R1-R2])/(2*pi);
fgu = fgu(find(fgu>0));
fgo = roots([(R1+R2)*L*C,-R1*R2*C,-R1-R2])/(2*pi);
fgo = fgo(find(fgo>0));
disp("Grenzfrequenzen (+/-45°)");
disp([" fgu = ",num2str(fgu)," Hz"]);
disp([" fgo = ",num2str(fgo)," Hz"]);
disp([" B = ",num2str(fgo-fgu)," Hz"]);
disp(" ");

% Grenzfrequenzen (-3dB)
fg = roots([(R1+R2)*L*C]^2,0,-(2*L*C*(R1+R2)^2+(R1*R2*C)^2),...
           0,(R1+R2)^2])/(2*pi);
fg = sort(fg(find(fg>0)));
disp("3dB-Grenzfrequenzen");
disp([" fgu = ",num2str(fg(1))," Hz"]);
disp([" fgo = ",num2str(fg(2))," Hz"]);
disp(" ");
```

Octave-Datei: loesung_04_05.m (Fortsetzung)

```

% Frequenzachse und Frequenzstützstellen
N = 256;
n = 0:N-1;

% Frequenzachse mit äquidistanten Frequenzstützstellen
fmin = 0;      % Hz
fmax = 10e3;   % Hz
f = fmin+n*(fmax-fmin)/(N-1);

% Übertragungsfunktion, Dämpfung und Phase
H = (R2*(1-L*C*(2*pi*f).^2))./...
    ((R1+R2)*(1-L*C*(2*pi*f).^2)+j*2*pi*f*R1*R2*C);
A = -20*log10(abs(H));
B = -angle(H)*180/pi;
B(find(abs(H)==min(abs(H)))) = NaN; % Keine Phase, wenn H=0!

% Darstellungsgrenzen der Diagramme (Ordinate)
Amin = 0;      % dB
Amax = 30;     % dB
Bmin = -90;    % Grad
Bmax = 90;     % Grad

% Darstellung der Dämpfung
hFig1 = figure("Name", "Dämpfung");
hPlot1 = plot(f*1e-3, A, "r");
axis([fmin*1e-3, fmax*1e-3, Amin, Amax]);
grid on;
title("\bf Dämpfung", "FontSize", 14);
xlabel("f / kHz", "FontSize", 12);
ylabel("A / dB", "FontSize", 12);

% Darstellung der Phase
hFig2 = figure("Name", "Phase");
hPlot2 = plot(f*1e-3, B, "b");
axis([fmin*1e-3, fmax*1e-3, Bmin, Bmax]);
grid on;
title("\bf Phase", "FontSize", 14);
xlabel("f / kHz", "FontSize", 12);
ylabel("B / °", "FontSize", 12);

```

Octave-Datei: loesung_04_05.m (Fortsetzung)

```

% Frequenzachse mit logarithmisch angeordneten Frequenzstützstellen
fmin = 1;      % Hz
fmax = 100e3; % Hz
f = 10.^(log10(fmin)+n*(log10(fmax)-log10(fmin))/(N-1));

% Übertragungsfunktion, Amplituden und Phasengang (Bode-Diagramm)
H = (R2*(1-L*C*(2*pi*f).^2))./...
    ((R1+R2)*(1-L*C*(2*pi*f).^2)+j*2*pi*f*R1*R2*C);
HdB = 20*log10(abs(H));
phi = angle(H)*180/pi;
phi(find(abs(H)==min(abs(H)))) = NaN; % Keine Phase, wenn H=0!

% Darstellungsgrenzen Bode-Diagramm
HdBmax = 0;    % dB
HdBmin = -80;  % dB
phimax = 90;   % Grad
phimin = -90;  % Grad

% Darstellung des Amplitudengangs
hFig3 = figure("Name", "Amplitudengang");
hPlot3 = semilogx(f, HdB, "r");
axis([fmin, fmax, HdBmin, HdBmax]);
grid on;
title("\b Amplitudengang", "FontSize", 14);
xlabel("f / Hz", "FontSize", 12);
ylabel("20lg|H| / dB", "FontSize", 12);

% Darstellung des Phasengangs
hFig4 = figure("Name", "Phasengang");
hPlot4 = semilogx(f, phi, "b");
axis([fmin, fmax, phimin, phimax]);
grid on;
title("\b Phasengang", "FontSize", 14);
xlabel("f / Hz", "FontSize", 12);
ylabel("arg\{H\} / °", "FontSize", 12);

```

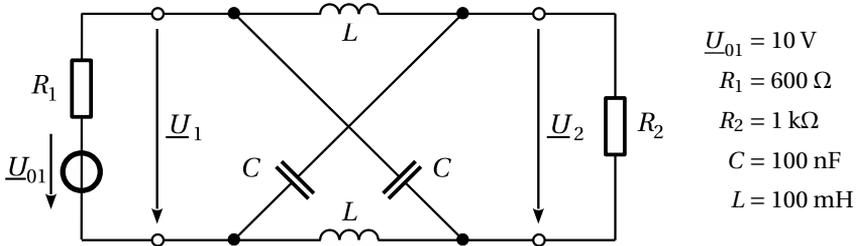
Octave-Datei: loesung_04_05.m (Fortsetzung)

```
% Darstellungsgrenzen Nyquist-Diagramm
Xmin = -0.5;
Xmax = 0.5;
Ymin = -0.5;
Ymax = 0.5;

% Darstellung des Nyquist-Diagramms
hFig5 = figure("Name","Nyquist-Diagramm");
hPlot5 = plot(real(H),imag(H),"r");
axis([Xmin,Xmax,Ymin,Ymax]);
axis square;
grid on;
title("\bf Nyquist-Diagramm","FontSize",14);
xlabel("Re\{H\}","FontSize",12);
ylabel("Im\{H\}","FontSize",12);
```

Übung 4.6 Allpassfilter

Im Bild ist die Schaltung eines Allpassfilters dargestellt. Die Amplitude der Ausgangsspannung $|\underline{U}_2|$ ist konstant. Lediglich die Phasenlage ändert sich mit der Frequenz.

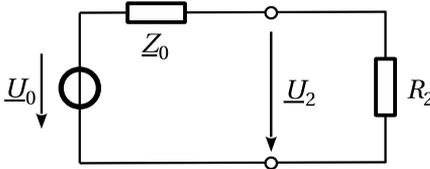


- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\underline{H}(j\omega) = \underline{U}_2(j\omega) / \underline{U}_1(j\omega)$.
- Zeigen Sie, dass mit den angegebenen Werten $|\underline{H}(j\omega)| = 1 \forall \omega$ ist.
- Stellen Sie die Phase im Frequenzbereich $0 \leq f \leq 10 \text{ kHz}$ dar.

Lösung der Übungsaufgabe 4.6 (Seite 151)

a) Übertragungsfunktion

Das Allpassfilter stellt eine mit dem Widerstand R_2 belastete Brückenschaltung dar. Zur Berechnung der Übertragungsfunktion $\underline{H}(j\omega) = \underline{U}_2(j\omega)/\underline{U}_1(j\omega)$ ersetzen wir die Brückenschaltung durch eine äquivalente Ersatzspannungsquelle \underline{U}_0 mit der Innenimpedanz \underline{Z}_0 . Die Eingangsspannung des Filters ist \underline{U}_1 , d. h., die Spannungsquelle \underline{U}_{01} mit dem Innenwiderstand R_1 spielt bei der Betrachtung keine Rolle.



$$\underline{Z}_0 = 2 \left(j\omega L \parallel \frac{1}{j\omega C} \right) = 2 \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_0 = \underline{U}_2 \Big|_{R_2 = \infty} &= \left(\frac{1/(j\omega C)}{j\omega L + 1/(j\omega C)} - \frac{j\omega L}{j\omega L + 1/(j\omega C)} \right) \cdot \underline{U}_1 \\ &= \left(\frac{1}{1 - \omega^2 LC} - \frac{-\omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC} \right) \cdot \underline{U}_1 = \frac{1 + \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC} \cdot \underline{U}_1 \end{aligned}$$

Wir berechnen nun die Ausgangsspannung \underline{U}_2 mit Hilfe der Ersatzschaltung und erhalten damit die Übertragungsfunktion $\underline{H}(j\omega)$.

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= \frac{R_2}{\underline{Z}_0 + R_2} \cdot \underline{U}_0 = \frac{R_2(1 - \omega^2 LC)}{R_2(1 - \omega^2 LC) + j2\omega L} \cdot \frac{1 + \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC} \cdot \underline{U}_1 \\ \underline{H}(j\omega) &= \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)} = \frac{R_2(1 + \omega^2 LC)}{R_2(1 - \omega^2 LC) + j2\omega L} \end{aligned}$$

b) Allpassfunktion

Wir betrachten das Betragsquadrat der Übertragungsfunktion.

$$\begin{aligned} |\underline{H}(j\omega)|^2 &= \frac{R_2^2(1 + \omega^2 LC)^2}{R_2^2(1 - \omega^2 LC)^2 + 4\omega^2 L^2} = \frac{R_2^2 + \omega^2 2R_2^2 LC + \omega^4 R_2^2 L^2 C^2}{R_2^2 - \omega^2 2R_2^2 LC + \omega^4 R_2^2 L^2 C^2 + \omega^2 4L^2} \\ &= \frac{R_2^2 + \omega^2 2R_2^2 LC + \omega^4 R_2^2 L^2 C^2}{R_2^2 + \omega^2 (4L^2 - 2R_2^2 LC) + \omega^4 R_2^2 L^2 C^2} \end{aligned}$$

Es gilt $|\underline{H}(j\omega)|^2 = 1 \forall \omega$, wenn $4L^2 - 2R_2^2 LC = 2R_2^2 LC$ erfüllt ist. Der Lastwiderstand R_2 muss somit

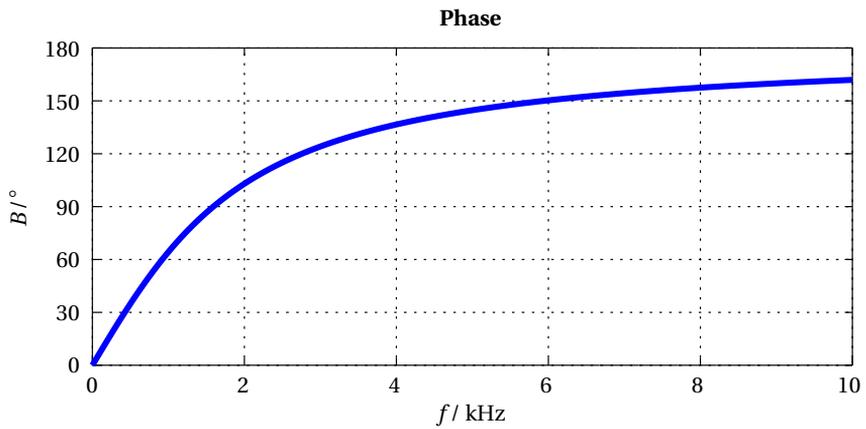
$$R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{100 \text{ mH}}{100 \text{ nF}}} = 1 \text{ k}\Omega$$

betragen. Diese Bedingung ist hier erfüllt.

c) Phase

$$B(\omega) = -\arg\{\underline{H}(j\omega)\} = \arg\left\{\frac{1}{\underline{H}(j\omega)}\right\}$$

$$= \begin{cases} \arctan\left(\frac{2\omega L}{R_2(1-\omega^2 LC)}\right) & \text{für } \omega < \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \arctan\left(\frac{2\omega L}{R_2(1-\omega^2 LC)}\right) + \pi & \text{sonst} \end{cases}$$



Octave-Datei: loesung_04_06.m

```
% Lösung der Übungsaufgabe 4.6

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
R1 = 600; % Ohm
R2 = 1e3; % Ohm
C = 100e-9; % F
L = 100e-3; % H
fmin = 0; % Hz
fmax = 10e3; % Hz
disp("Vorgaben");
disp([" R1 = ",num2str(R1)," Ohm"]);
disp([" R2 = ",num2str(R2)," Ohm"]);
disp([" C = ",num2str(C*1e9)," nF"]);
disp([" L = ",num2str(L*1e3)," mH"]);
disp(["fmin = ",num2str(fmin)," Hz"]);
disp(["fmax = ",num2str(fmax*1e-3)," kHz"]);
disp(" ");

% Frequenzachse erstellen
N = 256;
n = 0:N-1;
f = fmin+n*(fmax-fmin)/(N-1);

% Berechnung der Übertragungsfunktion und der Phase
H = (R2*(1+L*C*(2*pi*f).^2))./(R2*(1-L*C*(2*pi*f).^2)+j*4*pi*f*L);
B = -angle(H)*180/pi;

% Darstellungsgrenzen
Bmin = 0; % Grad
Bmax = 180; % Grad

% Darstellung der Phase
hFig1 = figure("Name","Phase");
hPlot1 = plot(f*1e-3,B,"b");
axis([fmin*1e-3,fmax*1e-3,Bmin,Bmax]);
grid on;
title("\b Phasengang","FontSize",14);
xlabel("f / kHz","FontSize",12);
ylabel("B / °","FontSize",12);
```