Grundlagen der Elektrotechnik

Eine Einführung in die Gleich- und Wechselstromtechnik

Lösungen der Übungsaufgaben aus Kapitel 3

Reinhard Scholz

16. März 2019

Die Lösung der Übungsaufgaben erfolgt zunächst analytisch in allgemeiner Form. Anschließend wird die numerische Lösung angegeben, die mit einem Taschenrechner oder mit Octave nachvollzogen werden kann. In den beiliegenden Octave-Skripten ist es aus syntaktischen Gründen nicht möglich, alle im Text benutzten Variablennamen zu verwenden. Die Anpassung wurde jedoch so vorgenommen, dass eine Zuordnung leicht möglich ist.

Teilweise weicht die Vorgehensweise bei der Berechnung mit Octave deutlich von der analytischen Methode ab. Dies ist beispielsweise bei der Lösung von quadratischen Gleichungen der Fall. Hier wird nicht die quadratische Ergänzung verwendet, sondern die Koeffizienten des zugehörigen Polynoms werden als Vektor dargestellt, der einem Algorithmus zur Nullstellensuche übergeben wird.

Die in diesem Dokument eingebundenen Diagramme wurden einer Nachbearbeitung unterzogen, so dass deren Erscheinungsbild von der Bildschirmausgabe abweicht.

Übung 3.1 Impedanz und Admittanz

Eine Impedanz weist bei der Frequenz $f = 1$ kHz den Wert $\underline{Z} = (300 + \mathrm{j}400)\ \Omega$ auf.

a) Bestimmen Sie den Scheinwiderstand.

b) Ermitteln Sie die Admittanz $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ sowie den Scheinleitwert.

c) Geben Sie zur Realisierung der Impedanz $\underline{Z}$ eine Schaltung aus zwei in Reihe geschalteten Bauelementen an und dimensionieren Sie diese Schaltung.

d) Geben Sie zur Realisierung der Impedanz $\underline{Z}$ eine Schaltung aus zwei parallel geschalteten Bauelementen an und dimensionieren Sie diese Schaltung.

Lösung der Übungsaufgabe 3.1 (Seite 119)

a) Scheinwiderstand

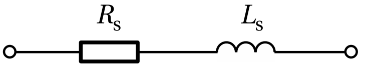
$$|\underline{Z}| = \sqrt{\left(\mathrm{Re}\{\underline{Z}\}\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\{\underline{Z}\}\right)^2} = \sqrt{(300\ \Omega)^2 + (400\ \Omega)^2} = 500\ \Omega$$

b) Admittanz und Scheinleitwert

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{(300 + \mathrm{j}\,400)\ \Omega} = \frac{300 - \mathrm{j}\,400}{250000}\ \mathrm{S} = (1{,}2 - \mathrm{j}\,1{,}6)\ \mathrm{mS}$$

$$|\underline{Y}| = \sqrt{\underline{Y}\,\underline{Y}^*} = \sqrt{\frac{1}{\underline{Z}}\,\frac{1}{\underline{Z}^*}} = \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}\underline{Z}^*}} = \frac{1}{|\underline{Z}|} = \frac{1}{500\ \Omega} = 2\ \mathrm{mS}$$

c) Reihenschaltung



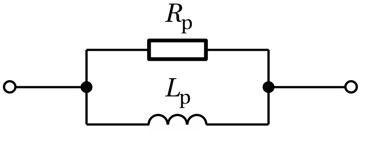
$$\underline{Z} = R_\mathrm{s} + \mathrm{j}\omega L_\mathrm{s}$$

$$R_\mathrm{s} = \mathrm{Re}\{\underline{Z}\} = 300\ \Omega$$

$$\omega L_\mathrm{s} = \mathrm{Im}\{\underline{Z}\} = 400\ \Omega$$

$$L_\mathrm{s} = \frac{\mathrm{Im}\{\underline{Z}\}}{2\pi f} = \frac{400\ \Omega}{2\pi \cdot 1\ \mathrm{kHz}} = 63{,}7\ \mathrm{mH}$$

d) Parallelschaltung



$$\underline{Y} = \frac{1}{R_\mathrm{p}} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L_\mathrm{p}}$$

$$R_\mathrm{p} = \frac{1}{\mathrm{Re}\{\underline{Y}\}} = \frac{1}{1{,}2\ \mathrm{mS}} = 833\ \Omega$$

$$\frac{1}{\mathrm{j}\omega L_\mathrm{p}} = \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\{\underline{Y}\} = -\mathrm{j}\,1{,}6\ \mathrm{mS}$$

$$L_\mathrm{p} = \frac{-1}{2\pi f\,\mathrm{Im}\{\underline{Y}\}} = \frac{1}{2\pi \cdot 1\ \mathrm{kHz} \cdot 1{,}6\ \mathrm{mS}} = 99{,}5\ \mathrm{mH}$$

Octave-Datei: loesung_03_01.m

```
% Lösung der Übungsaufgabe 3.1

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
Z = 300+j*400; % Ohm
f = 1000;      % Hz
disp("Vorgaben");
disp(["Z = (",num2str(Z),") Ohm"]);
disp(["f = ",num2str(f)," Hz"]);
disp(" ");

% Scheinwiderstand
disp("Scheinwiderstand");
disp(["|Z| = ",num2str(abs(Z))," Ohm"]);
disp(" ");

% Admittanz und Scheinleitwert
disp("Admittanz und Scheinleitwert");
Y = 1/Z;
disp([" Y  = (",num2str(Y*1e3),") mS"]);
disp(["|Y| = ",num2str(abs(Y)*1e3)," mS"]);
disp(" ");

% Reihenschaltung
disp("Reihenschaltung von Rs und Ls");
Rs = real(Z);
Ls = imag(Z)/(2*pi*f);
disp(["Rs = ",num2str(Rs)," Ohm"]);
disp(["Ls = ",num2str(Ls*1e3)," mH"]);
disp(" ");

% Parallelschaltung
disp("Parallelschaltung von Rp und Lp");
Rp = 1/real(Y);
Lp = -1/(2*pi*f*imag(Y));
disp(["Rp = ",num2str(Rp)," Ohm"]);
disp(["Lp = ",num2str(Lp*1e3)," mH"]);
disp(" ");
```

Übung 3.2 Strom durch Impedanz

An die Impedanz $\underline{Z} = (300 + \mathrm{j}\,400)\ \Omega$ wird die Spannung

$$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(2\pi f\, t + \varphi_u)$$

mit $\hat{u} = 5$ V, $\varphi_u = \pi/4$ und $f = 1$ kHz gelegt.

a) Ermitteln Sie die komplexe Amplitude $\underline{\hat{U}}$ der anliegenden Spannung.

b) Berechnen Sie die komplexe Amplitude $\underline{\hat{I}}$ des Stromes durch die Impedanz.

c) Geben Sie den zeitlichen Verlauf des Stromes $i(t)$ an.

d) Stellen Sie die Impedanz $\underline{Z}$ in Polarform dar und geben Sie den Winkel $\varphi = \arg\{\underline{Z}\}$ an. Vergleichen Sie den Winkel der Impedanz mit der Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom. Was stellen Sie fest?

Lösung der Übungsaufgabe 3.2 (Seite 120)

a) Komplexe Amplitude $\underline{\hat{U}}$

$$\underline{\hat{U}} = \hat{u}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u} = 5\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}$$

b) Komplexe Amplitude $\underline{\hat{I}}$

$$\underline{\hat{I}} = \frac{\underline{\hat{U}}}{\underline{Z}} = \frac{5\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}}{(300+\mathrm{j}400)\,\Omega} = \frac{5\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}45^\circ}}{500\,\Omega\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}53{,}1^\circ}} = 10\,\mathrm{mA}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}8{,}1^\circ}$$

c) Zeitlicher Verlauf des Stromes $i(t)$

$$u(t) = \hat{i}\cdot\cos(2\pi f t + \varphi_i) \qquad \text{mit } \hat{i} = |\underline{\hat{I}}| = 10\,\mathrm{mA} \quad \text{und } \varphi_i = \arg\{\underline{\hat{I}}\} = -8{,}1^\circ$$

d) Impedanz $\underline{Z}$ in Polarform

$$|\underline{Z}| = \sqrt{\left(\mathrm{Re}\{\underline{Z}\}\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\{\underline{Z}\}\right)^2} = \sqrt{(300\,\Omega)^2 + (400\,\Omega)^2} = 500\,\Omega$$

$$\varphi = \arg\{\underline{Z}\} = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\,\underline{Z}}{\mathrm{Re}\,\underline{Z}}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 53{,}1^\circ$$

$$\underline{Z} = |\underline{Z}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = 500\,\Omega\cdot\mathrm{e}^{j53{,}1^\circ}$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

Da bei Impedanzen und Admittanzen der Realteil in der Regel positiv ist (passive Bauelemente), kann die arctan-Funktion ohne Fallunterscheidung angewendet werden. Der Winkel liegt im Bereich $-90^\circ \le \varphi \le +90^\circ$. Nur bei negativem Realteil ist eine Fallunterscheidung notwendig.

Der Winkel der Impedanz (Admittanz) gibt die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom an.

Octave-Datei: `loesung_03_02.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 3.2

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
Z = 300+j*400; % Ohm
f = 1000;      % Hz
u_s = 5;       % V
phiu = pi/4;   % Radiant
disp("Vorgaben");
disp(["   Z = (",num2str(Z),") Ohm"]);
disp(["   f = ",num2str(f)," Hz"]);
disp([" u_s = ",num2str(u_s)," V"]);
disp(["phiu = ",num2str(phiu*180/pi),"°"]);
disp(" ");

% Komplexe Amplitude der Spannung
U = u_s*exp(j*phiu);
disp("Komplexe Amplitude der Spannung");
disp(["U = (",num2str(U),") V"]);
disp(" ");

% Komplexe Amplitude des Stromes
I=U/Z;
i_s = abs(I);
phii = angle(I);
disp("Komplexe Amplitude des Stromes");
disp(["  I  = (",num2str(I*1e3),") mA"]);
disp([" |I| = ",num2str(abs(I)*1e3)," mA"]);
disp(["phii = ",num2str(phii*180/pi),"°"]);
disp(" ");

% Impedanz in Polarform
disp("Impedanz in Polarform");
disp(["   |Z| = ",num2str(abs(Z))," Ohm"]);
disp(["arg(Z) = ",num2str(angle(Z)*180/pi),"°"]);
```

Übung 3.3 Komplexe Amplituden

Ein Widerstand $R = 1\ \mathrm{k\Omega}$ ist mit einer Kapazität $C = 1\ \mathrm{\mu F}$ in Reihe geschaltet. An diese Reihenschaltung wird die Spannung $\underline{\hat{U}} = 10\ \mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}30^\circ}$ angelegt. Die Schaltung wird bei der Frequenz $f = \omega/2\pi = 1\ \mathrm{kHz}$ betrachtet.

a) Skizzieren Sie die Schaltung und tragen Sie die komplexen Amplituden aller Ströme und Spannungen ein.

b) Berechnen Sie die Impedanz $\underline{Z}$ und den Scheinwiderstand.

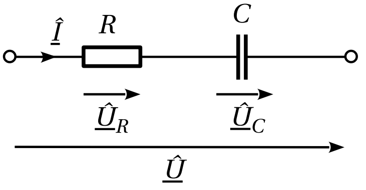
c) Bestimmen Sie die komplexe Amplitude $\underline{\hat{U}}_R$ der Spannung über dem Widerstand R sowie die komplexe Amplitude $\underline{\hat{U}}_C$ der Spannung über der Kapazität C.

d) Skizzieren Sie das Zeigerdiagramm der komplexen Spannungsamplituden.

e) Geben Sie die zeitabhängigen Größen $u(t) = \mathrm{Re}\{\underline{\hat{U}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}$ sowie $i(t) = \mathrm{Re}\{\underline{\hat{I}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}$ an.

Lösung der Übungsaufgabe 3.3 (Seite 120)

a) Schaltung



b) Impedanz und Scheinwiderstand

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = R - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C} = (1000 - \mathrm{j}\,159)\ \Omega = 1012{,}6\ \Omega \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}9^\circ}$$

$$|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = 1012{,}6\ \Omega$$

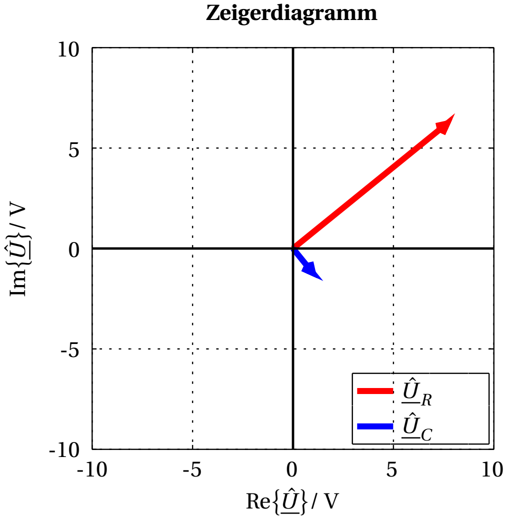
c) Komplexe Amplituden $\hat{\underline{U}}_R$ und $\hat{\underline{U}}_C$

$$\hat{\underline{U}}_R = \frac{R}{\underline{Z}} \cdot \hat{\underline{U}} = \frac{1\ \mathrm{k}\Omega}{1012{,}6\ \Omega \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}9^\circ}} \cdot 10\ \mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}30^\circ} = 9{,}88\ \mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}39^\circ}$$

$$\hat{\underline{U}}_C = \frac{1/(\mathrm{j}\omega C)}{\underline{Z}} \cdot \hat{\underline{U}} = \frac{-\mathrm{j}\,159\ \Omega}{1012{,}6\ \Omega \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}9^\circ}} \cdot 10\ \mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}30^\circ} = 1{,}57\ \mathrm{V} \cdot e^{-j51^\circ}$$

Beachte: $-\mathrm{j} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}90^\circ} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}$.

d) Zeigerdiagramme von $\hat{\underline{U}}_R$ und $\hat{\underline{U}}_C$



e) Zeitabhängigen Größen $u(t)$ und $i(t)$

$$\underline{\hat{I}} = \frac{\underline{\hat{U}}}{\underline{Z}} = \frac{10\,\mathrm{V}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}30^\circ}}{1012{,}6\,\Omega\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}9^\circ}} = 9{,}88\,\mathrm{mA}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}39^\circ}$$

$$u(t) = \mathrm{Re}\{\underline{\hat{U}}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} = \hat{u}\cdot\cos(2\pi f t + \varphi_u) \quad \text{mit } \hat{u} = |\underline{\hat{U}}| = 10\,\mathrm{V} \quad \text{und } \varphi_u = \arg\{\underline{\hat{U}}\} = 30^\circ$$

$$i(t) = \mathrm{Re}\{\underline{\hat{I}}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} = \hat{i}\cdot\cos(2\pi f t + \varphi_i) \quad \text{mit } \hat{i} = |\underline{\hat{I}}| = 9{,}88\,\mathrm{mA} \quad \text{und } \varphi_i = \arg\{\underline{\hat{I}}\} = 39^\circ$$

Octave-Datei: `loesung_03_03.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 3.3

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
R = 1e3;                   % Ohm
C = 1e-6;                  % F
U = 10*exp(j*30*pi/180);   % V (Argument: Grad -> Radiant)
f = 1000;                  % Hz
disp("Vorgaben");
disp(["  R  = ",num2str(R)," Ohm"]);
disp(["  C  = ",num2str(C*1e6)," uF"]);
disp(["  U  = (",num2str(U),") V"]);
disp([" |U| = ",num2str(abs(U))," V"]);
disp(["phiu = ",num2str(angle(U)*180/pi),"°"]);
disp(["  f  = ",num2str(f)," Hz"]);
disp(" ");

% Berechnung der Impedanz
Z = R+1/(j*2*pi*f*C);
disp("Impedanz");
disp(["  Z  = (",num2str(Z),") Ohm"]);
disp([" |Z| = ",num2str(abs(Z))," Ohm"]);
disp([" phi = ",num2str(angle(Z)*180/pi),"°"]);
disp(" ");

% Komplexe Amplituden der Spannungen an R und C
Ur = U*R/Z;
Uc = U*(1/(j*2*pi*f*C))/Z;
disp("Komplexe Amplituden der Spannungen an R und C");
disp([" Ur  = (",num2str(Ur),") V"]);
disp(["|Ur| = ",num2str(abs(Ur))," V"]);
disp(["phir = ",num2str(angle(Ur)*180/pi),"°"]);
disp([" Uc  = (",num2str(Uc),") V"]);
disp(["|Uc| = ",num2str(abs(Uc))," V"]);
disp(["phic = ",num2str(angle(Uc)*180/pi),"°"]);
disp(" ");

% Berechnung des Stromes
I = U/Z;
disp("Strom durch die Reihenschaltung");
disp(["  I  = (",num2str(I*1e3),") mA"]);
disp([" |I| = ",num2str(abs(I*1e3))," mA"]);
disp(["phii = ",num2str(angle(I)*180/pi),"°"]);
disp(" ");
```

Octave-Datei: `loesung_03_03.m` (Fortsetzung)

```
% ==========================================================
% Funktion zur grafischen Darstellung eines Zeigers
function pX = makepointer(x,s)
x = x(:);
d = x*s./abs(x);
pX = [zeros(length(x),1),x,x-d*(1+j/2),x,x-d*(1-j/2)].';
endfunction
% ==========================================================

% Erzeugung des Zeigers (Linie und Pfeilspitze)
Umax = 10; % V  (Skalierung des Zeigerdiagramms)
pUr = makepointer(Ur,Umax/20);
pUc = makepointer(Uc,Umax/20);

% Darstellung des Zeigerdiagramms
hFig1 = figure("Name","Zeigerdiagramm");
hPlot1 = plot(pUr,"r",pUc,"b");
axis([-Umax,Umax,-Umax,Umax]);
axis square;
grid on;
title("\\bf Zeigerdiagramm","FontSize",14);
xlabel("Re\\{U\\} / V","FontSize",12);
ylabel("Im\\{U\\} / V","FontSize",12);
legend(hPlot1,"U_R","U_C","location","southeastoutside");
```

Übung 3.4 Komplexe Amplituden und Reaktanzen

Eine Reihenschaltung aus drei Bauelementen, nämlich einem ohmschen Widerstand $R = 5\,\Omega$, einer Induktivität $L = 1\,\text{mH}$ und einer Kapazität $C = 10\,\mu\text{F}$ ist an eine Spannungsquelle mit der Quellspannung $u_0(t) = \hat{u} \cdot \cos(2\pi f t + \pi/4)$ angeschlossen, wobei $f = 1\,\text{kHz}$ und $\hat{u} = 10\,\text{V}$ betragen.

a) Skizzieren Sie die Schaltung. Tragen Sie auch die komplexe Amplitude $\underline{U}_0$ der Quellspannung sowie die komplexen Amplituden der Spannungen an den jeweiligen Bauelementen $\underline{U}_R$, $\underline{U}_L$ und $\underline{U}_C$ in die Schaltung ein.

b) Berechnen Sie die komplexe Amplitude der Quellspannung $\underline{U}_0$. Beachten Sie dabei, dass sich der Betrag auf den Effektivwert und nicht auf den Spitzenwert bezieht.

c) Berechnen Sie die Reaktanzen X_L und X_C sowie die Impedanz $\underline{Z}$ der Reihenschaltung. Skizzieren Sie das zugehörige Zeigerdiagramm der Impedanz.

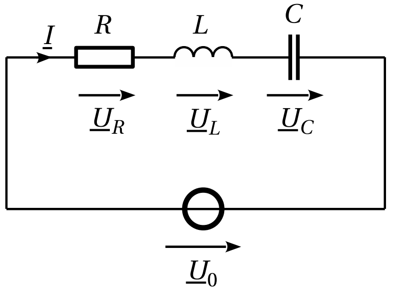
d) Berechnen Sie die komplexe Amplitude $\underline{I}$ des Stromes und geben Sie dessen zeitlichen Verlauf $i(t)$ an.

e) Bestimmen Sie die Spannungen $\underline{U}_R$, $\underline{U}_L$ und $\underline{U}_C$ und stellen Sie die Zeiger in einem Zeigerdiagramm dar.

f) Bei welcher Frequenz f_0 sind die Reaktanzen X_L und X_C betragsmäßig gleich groß? Welchen Wert nimmt dann der Strom $\underline{I}$ an?

Lösung der Übungsaufgabe 3.4 (Seite 120)

a) Schaltung



b) Komplexe Amplitude $\underline{U}_0$ der Quellspannung $u_0(t)$

$$u_0(t) = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\,\underline{U}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} \qquad \text{mit} \quad \omega = 2\pi f$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\,|\underline{U}_0|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \sqrt{2}\,|\underline{U}_0|\cos(\omega t + \varphi) = \hat{u}\cos(2\pi f t + \pi/4)$$

$$\Rightarrow \quad |\underline{U}_0| = \hat{u}/\sqrt{2} = 10\,\mathrm{V}/\sqrt{2} = 7{,}07\,\mathrm{V}$$

$$\varphi = \pi/4 \mathrel{\widehat{=}} 45^\circ$$

$$\underline{U}_0 = 7{,}07\,\mathrm{V}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4} = (5 + j5)\,\mathrm{V}$$

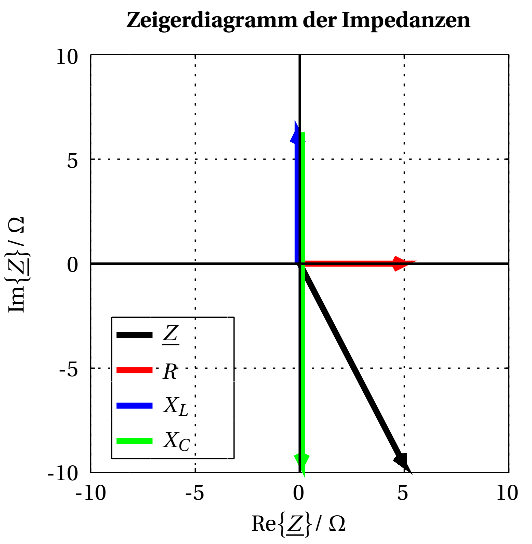
c) Reaktanzen X_L, X_C und Impedanz $\underline{Z}$

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 6{,}28\,\Omega$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{2\pi f C} = -15{,}9\,\Omega$$

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}\,X = R + \mathrm{j}\,(X_L + X_C) = (5 - \mathrm{j}\,9{,}6)\,\Omega = 10{,}9\,\Omega \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}62{,}6°}$$

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2} = 10{,}9\,\Omega$$



d) Komplexe Amplitude $\underline{I}$ des Stromes und zeitlicher Verlauf $i(t)$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}} = \frac{7{,}07\,\mathrm{V}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}45^\circ}}{10{,}9\,\Omega\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}62{,}6^\circ}} = 652\,\mathrm{mA}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,107{,}6^\circ}$$

$$i(t) = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\,\underline{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \hat{i}\cos\left(2\pi f\,t + \varphi_i\right) \quad \text{mit } \hat{i} = 921\,\mathrm{mA} \text{ und } \varphi_i = 1{,}876 \mathrel{\widehat{=}} 107{,}6^\circ$$

$$i(t) = 921\,\mathrm{mA}\cdot\cos\left(2\pi f\,t + 1{,}877\right)$$

e) Komplexe Amplituden der Spannungen

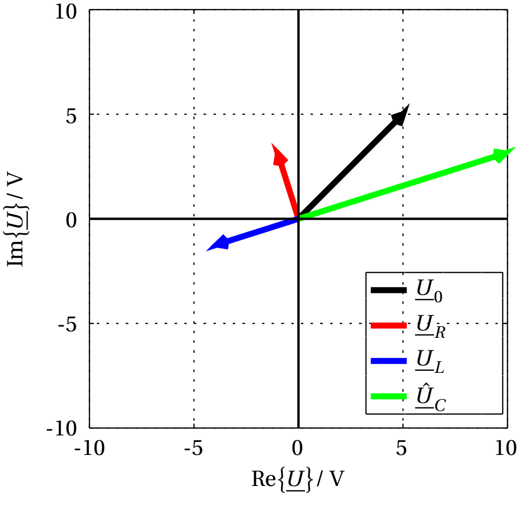
$$\underline{U}_R = R\cdot\underline{I} = 5\,\Omega\cdot 652\,\mathrm{mA}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,107{,}6^\circ} = 3{,}258\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,107{,}6^\circ}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_L &= \mathrm{j}\,X_L\cdot\underline{I} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\pi/2}\cdot X_L\cdot\underline{I} = 6{,}28\,\Omega\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,90^\circ}\cdot 652\,\mathrm{mA}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,107{,}6^\circ}\\ &= 4{,}094\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,197{,}6^\circ} = 4{,}094\cdot\ \mathrm{V}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,162{,}4^\circ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_C &= \mathrm{j}\,X_C\cdot\underline{I} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\pi/2}\cdot X_C\cdot\underline{I} = -15{,}9\,\Omega\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,90^\circ}\cdot 652\,\mathrm{mA}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,107{,}6^\circ}\\ &= 15{,}9\,\Omega\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,90^\circ}\cdot 652\,\mathrm{mA}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,107{,}6^\circ} = 10{,}37\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,17{,}6^\circ}\end{aligned}$$

Beachte: $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,90^\circ}$ und $-\mathrm{j} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,90^\circ}$ bzw. $-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,90^\circ} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,90^\circ}$.

Zeigerdiagramm der Spannungen



f) Resonanzfrequenz

$$X_L = \omega L \geq 0$$

$$X_C = \frac{-1}{\omega C} \leq 0$$

$$|X_L| = |X_C|: \qquad \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1591{,}549\ \mathrm{Hz}$$

Reaktanzen und Impedanz bei Resonanzfrequenz f_0

$$X_{L0} = \omega_0 L = 2\pi f_0 L = 10\ \Omega$$

$$X_{C0} = \frac{-1}{\omega_0 C} = \frac{-1}{2\pi f_0 C} = -10\ \Omega$$

$$\underline{Z}_0 = R + \mathrm{j}\,(X_{L0} + X_{C0}) = 5\ \Omega$$

Die Impedanz wird rein reell, der Scheinwiderstand wird minimal.

Strom bei Resonanzfrequenz

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_0} = \frac{7{,}07\ \mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}}{5\ \Omega} = 1{,}414\ \mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}$$

Der Strom wird maximal und ist in Phase mit der Spannung $\underline{U}_0$ über der gesamten Reihenschaltung.

Octave-Datei: `loesung_03_04.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 3.4

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
R = 5;          % Ohm
L = 1e-3;       % H
C = 10e-6;      % F
u_s = 10;       % V
phi0 = pi/4;    % Radiant
f = 1000;       % Hz
disp("Vorgaben");
disp(["   R   = ",num2str(R)," Ohm"]);
disp(["   L   = ",num2str(L*1e3)," mH"]);
disp(["   C   = ",num2str(C*1e6)," uF"]);
disp([" u_s = ",num2str(u_s)," V"]);
disp(["phi0 = ",num2str(phi0*180/pi),"°"]);
disp(["   f   = ",num2str(f)," Hz"]);
disp(" ");

% Komplexe Amplitude der Spannung u0(t)
U0 = u_s*exp(j*phi0)/sqrt(2);
disp("Komplexe Amplitude der Spannung u0(t)");
disp([" U0   = (",num2str(U0),") V"]);
disp(["|U0| = ",num2str(abs(U0))," V"]);
disp(["phi0 = ",num2str(angle(U0)*180/pi),"°"]);
disp(" ");

% Reaktanzen XL, XC und Impedanz Z
XL = 2*pi*f*L;
XC = -1/(2*pi*f*C);
Z = R+j*(XL+XC);
disp("Reaktanzen XL, XC und Impedanz Z");
disp([" XL   = ",num2str(XL)," Ohm"]);
disp([" XC   = ",num2str(XC)," Ohm"]);
disp(["   Z   = (",num2str(Z),") Ohm"]);
disp([" |Z| = ",num2str(abs(Z))," Ohm"]);
disp([" phi = ",num2str(angle(Z)*180/pi),"°"]);
disp(" ");
```

Octave-Datei: `loesung_03_04.m` (Fortsetzung)

```
% Berechnung des Stromes
I = U0/Z;
i_s = abs(I)*sqrt(2);
disp("Berechnung des Stromes");
disp(["    I  = (",num2str(I*1e3),") mA"]);
disp(["   |I| = ",num2str(abs(I)*1e3)," mA  (Effektivwert)"]);
disp(["arg{I} = ",num2str(angle(I)*180/pi),"°"]);
disp(["   i_s = ",num2str(i_s*1e3)," mA  (Spitzenwert)"]);
disp(["  phii = ",num2str(angle(I)*180/pi),"°"]);
disp(" ");

% Berechnung der Spannungen
UR = R*I;
UL = j*XL*I;
UC = j*XC*I;
disp("Berechnung der Spannungen");
disp([" UR  = (",num2str(UR),") V"]);
disp(["|UR| = ",num2str(abs(UR))," V"]);
disp(["phiR = ",num2str(angle(UR)*180/pi),"°"]);
disp([" UL  = (",num2str(UL),") V"]);
disp(["|UL| = ",num2str(abs(UL))," V"]);
disp(["phiL = ",num2str(angle(UL)*180/pi),"°"]);
disp([" UC  = (",num2str(UC),") V"]);
disp(["|UC| = ",num2str(abs(UC))," V"]);
disp(["phiC = ",num2str(angle(UC)*180/pi),"°"]);
disp(" ");

% Resonanzfrequenz
f0 = 1/(2*pi*sqrt(L*C));
disp("Resonanzfrequenz");
disp([" f0  = ",num2str(f0)," Hz"]);
disp(" ");

% Reaktanzen und Impedanz bei Resonanzfrequenz
XL0 = 2*pi*f0*L;
XC0 = -1/(2*pi*f0*C);
Z0 = R+j*(XL0+XC0);
disp("Reaktanzen XL0, XC0 und Impedanz Z0 bei Resonanzfrequenz");
disp(["   XL0   = ",num2str(XL0)," Ohm"]);
disp(["   XC0   = ",num2str(XC0)," Ohm"]);
disp(["    Z0   = ",num2str(Z0)," Ohm"]);
disp(["   |Z0|  = ",num2str(abs(Z0))," Ohm"]);
disp(["arg{Z0} = ",num2str(angle(Z0)*180/pi),"°"]);
disp(" ");
```

Octave-Datei: `loesung_03_04.m` (Fortsetzung)

```
% Strom bei Resonanzfrequenz
I0 = U0/Z0;
disp("Strom I0 bei Resonanzfrequenz");
disp(["    I0  = (",num2str(I0),") A"]);
disp(["   |I0| = ",num2str(abs(I0))," A  (Effektivwert)"]);
disp(["arg{I0} = ",num2str(angle(I0)*180/pi),"°"]);
disp(" ");

% =========================================================
% Funktion zur grafischen Darstellung eines Zeigers
function pX = makepointer(x,s)
x = x(:);
d = x*s./abs(x);
pX = [zeros(length(x),1),x,x-d*(1+j/2),x,x-d*(1-j/2)].';
endfunction
% =========================================================

% Erzeugung der Zeiger (Linie und Pfeilspitze)
Zmax = 10; % Ohm  (Skalierung des Zeigerdiagramms der Impedanzen)
Umax = 10; % V    (Skalierung des Zeigerdiagramms der Spannungen)
% Impedanzen
pZ = makepointer(Z,Zmax/20);
pR = makepointer(R,Zmax/20);
pXL = makepointer(j*XL,Zmax/20);
pXC = makepointer(j*XC,Zmax/20);
% Spannungen
pU0 = makepointer(U0,Umax/20);
pUR = makepointer(UR,Umax/20);
pUC = makepointer(UC,Umax/20);
pUL = makepointer(UL,Umax/20);
```

Octave-Datei: `loesung_03_04.m` (Fortsetzung)

```
% Darstellung des Zeigerdiagramms der Impedanzen
hFig1 = figure("Name","Zeigerdiagramm der Impedanzen");
hPlot1 = plot(pZ,"k",pR,"r",pXL-Zmax/100,"b",pXL(2)+pXC+Zmax/100,"g");
% Der Zeiger pXL wird leicht nach links versetzt, der Zeiger pXC wird
% leicht nach rechts versetzt und beginnt an der Zeigerspitze von pXL.
axis([-Zmax,Zmax,-Zmax,Zmax]);
axis square;
grid on;
title("\\bf Zeigerdiagramm der Impedanzen","FontSize",14);
xlabel("Re\\{Z\\} / \\Omega","FontSize",12);
ylabel("Im\\{Z\\} / \\Omega","FontSize",12);
legend(hPlot1,"Z","R","X_L","X_C","location","southeastoutside");

% Darstellung des Zeigerdiagramms der Spannungen
hFig2 = figure("Name","Zeigerdiagramm der Spannungen");
hPlot2 = plot(pU0,"k",pUR,"r",pUL,"b",pUC,"g");
axis([-Umax,Umax,-Umax,Umax]);
axis square;
grid on;
title("\\bf Zeigerdiagramm der Spannungen","FontSize",14);
xlabel("Re\\{U\\} / V","FontSize",12);
ylabel("Im\\{U\\} / V","FontSize",12);
legend(hPlot2,"U_0","U_R","U_L","U_C","location","southeastoutside");
```

Übung 3.5 Schwingkreis

Ein Parallelschwingkreis besteht aus einem ohmschen Widerstand $R = 1\,\text{k}\Omega$, einer Induktivität $L = 2{,}2\,\text{mH}$ und einer Kapazität $C = 1{,}8\,\text{nF}$.

a) Geben Sie die Admittanz $\underline{Y}$ in allgemeiner Form an. Bei welcher Frequenz wird die Admittanz $\underline{Y}$ reell?

b) Stellen Sie den Scheinleitwert $Y = |\underline{Y}|$ und den Scheinwiderstand $Z = |\underline{Z}|$ über der Frequenz in jeweils einem Diagramm dar.

c) Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz f_0 und berechnen Sie die Admittanz $\underline{Y}$ sowie die Blindleitwerte B_C und B_L bei den Frequenzen $f = f_0$, $f = 2f_0$ und $f = f_0/2$.

d) Skizzieren Sie die Zeigerdiagramme der Admittanz $\underline{Y}$ bei den Frequenzen $f = f_0$, $f = 2f_0$ und $f = f_0/2$.

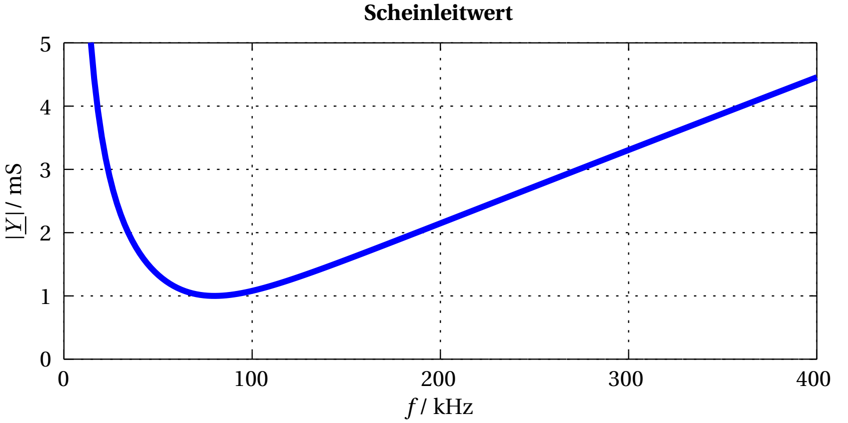
Lösung der Übungsaufgabe 3.5 (Seite 121)

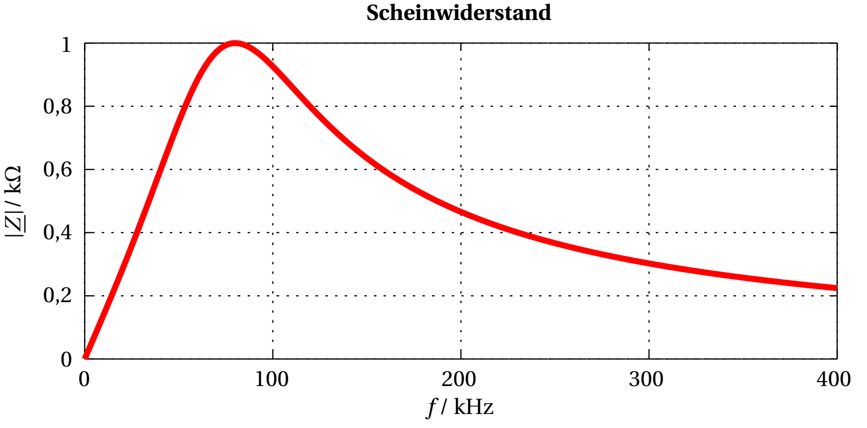
a) Admittanz des Parallelschwingkreises

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L}$$

$$\operatorname{Im}\underline{Y} = \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L} = 0 \quad \text{für} \quad \omega_0^2 LC = 1 \quad \Rightarrow \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

b) Scheinleitwert $Y = |\underline{Y}|$ und Scheinwiderstand $Z = |\underline{Z}|$





c) Resonanzfrequenz, Admittanz und Blindleitwerte bei bestimmten Frequenzen

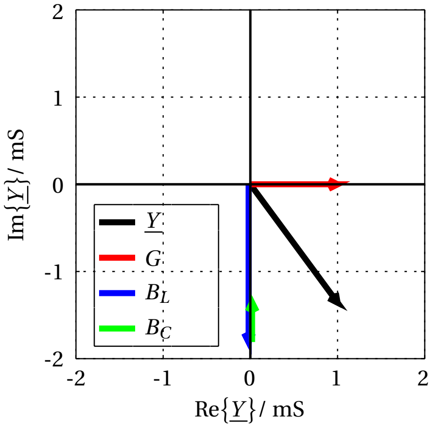
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 80\,\text{kHz}, \qquad B_C = 2\pi f C, \qquad B_L = -\frac{1}{2\pi f L}$$

Admittanz und Blindleitwerte sowie Impedanz und Blindwiderstände

f / kHz	$\underline{Y}$ / mS	B_C / mS	B_L / mS	$\underline{Z}$ / Ω	X_C / Ω	X_L / Ω
40	$1 - \mathrm{j}1{,}36$	0,45	−1,81	$352 + \mathrm{j}478$	−2211	552,7
80	1	0,91	−0,91	1000	−1106	1106
160	$1 + \mathrm{j}1{,}36$	1,81	−0,45	$352 - \mathrm{j}478$	−552,7	2211

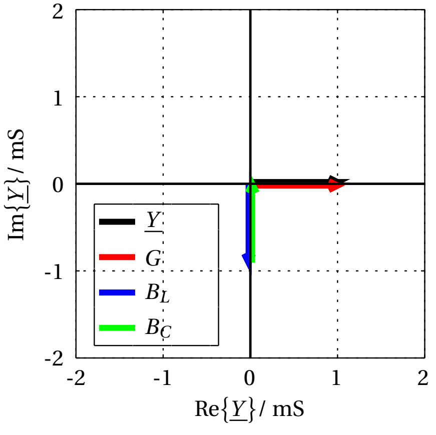
d) Zeigerdiagramme der Admittanz $\underline{Y}$

Zeigerdiagramm der Admittanz bei $f = f_0/2$



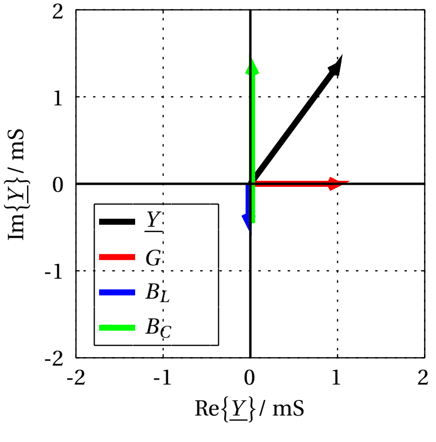
Bei niedrigen Frequenzen unterhalb der Resonanzfrequenz überwiegt der induktive Anteil des Scheinleitwerts, d. h., $-B_L > B_C > 0$. Mit zunehmender Frequenz geht der negative Wert $B_L + B_C$ weiter gegen null und der Zeiger der Admittanz $\underline{Y}$ dreht sich entgegen des Uhrzeigersinns auf die positive reelle Achse. Der Winkel $\arg(\underline{Y})$ ist dabei stets negativ.

Zeigerdiagramm der Admittanz bei $f = f_0$



Bei der Resonanzfrequenz heben sich die Blindleitwerte von Kapazität und Induktivität auf. Die Admittanz wird rein reell, der Scheinwiderstand $|\underline{Y}|$ nimmt sein Minimum an. Bei und in der Nähe der Resonanzfrequenz können zwischen Kapazität und Induktivität sehr große Ströme fließen, die nach außen nicht in Erscheinung treten (Stromüberhöhung).

Zeigerdiagramm der Admittanz bei $f = 2f_0$



Bei hohen Frequenzen oberhalb der Resonanzfrequenz überwiegt der kapazitive Anteil des Scheinleitwerts, d. h., $B_C > -B_L > 0$. Mit zunehmender Frequenz steigt der positive Wert $B_L + B_C$ weiter an und der Zeiger der Admittanz $\underline{Y}$ dreht sich entgegen des Uhrzeigersinns in Richtung der positiven imaginären Achse. Der Winkel $\arg(\underline{Y})$ ist dabei stets positiv.

Octave-Datei: `loesung_03_05.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 3.5

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
R = 1e3;      % Ohm
L = 2.2e-3;   % H
C = 1.8e-9;   % F
disp("Vorgaben");
disp(["  R  = ",num2str(R)," Ohm"]);
disp(["  L  = ",num2str(L*1e3)," mH"]);
disp(["  C  = ",num2str(C*1e9)," nF"]);
disp(" ");

% Resonanzfrequenz
f0 = 1/(2*pi*sqrt(L*C));
disp("Resonanzfrequenz");
disp(["  f0 = ",num2str(f0*1e-3)," kHz"]);
disp(" ");

% Grenzen des Darstellungsbereichs
fmin = 0;
fmax = 5*round(f0*1e-3)*1e3;

% Festlegung der Stützstellen
N = 200;
n = 0:(N-1);

% Frequenzachse erstellen
f = n*(fmax-fmin)/(N-1)+fmin;

% Berechnung von Admittanz und Impedanz
Y = 1/R+j*2*pi*f*C+1./(j*2*pi*f*L);
Z = 1./Y;

% Darstellung des Scheinleitwerts
hFig1 = figure("Name","Scheinleitwert");
hPlot1 = plot(f*1e-3,abs(Y)*1e3,"b"); % f in kHz, |Y| in mS
grid on;
title("\\bf Scheinleitwert über der Frequenz","FontSize",14);
xlabel("f / kHz","FontSize",12);
ylabel("|Y| / mS","FontSize",12);
```

Octave-Datei: `loesung_03_05.m` (Fortsetzung)

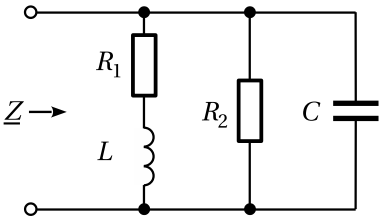
```
% Darstellung des Scheinwiderstands
hFig2 = figure("Name","Scheinwiderstand");
hPlot2 = plot(f*1e-3,abs(Z)*1e-3,"r"); % f in kHz, |Z| in kOhm
grid on;
title("\\bf Scheinwiderstand über der Frequenz","FontSize",14);
xlabel("f / kHz","FontSize",12);
ylabel("|Z| / k\\Omega","FontSize",12);

% Admittanz und Blindleitwerte bei f0/2, f0 und 2f0
f = [f0/2,f0,2*f0];
BC = 2*pi*f*C;
BL = -1./(2*pi*f*L);
Y = 1/R+j*(BC+BL);
disp("Blindleitwerte und Admittanz bei f0/2, f0 und 2f0");
disp("f/kHz\tBC/mS\tBL/mS\tY/mS");
for i=1:length(f)
  disp([num2str(f(i)*1e-3,4),"\t",num2str(BC(i)*1e3,4),"\t",...
        num2str(BL(i)*1e3,4),"\t",num2str(Y(i)*1e3,4)]);
endfor
disp(" ");

% =========================================================
% Funktion zur grafischen Darstellung eines Zeigers
function pX = makepointer(x,s)
x = x(:);
d = x*s./abs(x);
pX = [zeros(length(x),1),x,x-d*(1+j/2),x,x-d*(1-j/2)].';
endfunction
% =========================================================

% Erzeugung der Zeiger (Linie und Pfeilspitze)
Ymax = 2e-3; % S  (Skalierung des Zeigerdiagramms der Admittanzen)
% Admittanz bei f = f0/2
pY1 = makepointer(Y(1),Ymax/20);
pG1 = makepointer(1/R,Ymax/20);
pBC1 = makepointer(j*BC(1),Ymax/20);
pBL1 = makepointer(j*BL(1),Ymax/20);
% Admittanz bei f = f0
pY2 = makepointer(Y(2),Ymax/20);
pG2 = makepointer(1/R,Ymax/20);
pBC2 = makepointer(j*BC(2),Ymax/20);
pBL2 = makepointer(j*BL(2),Ymax/20);
% Admittanz bei f = 2f0
pY3 = makepointer(Y(3),Ymax/20);
pG3 = makepointer(1/R,Ymax/20);
pBC3 = makepointer(j*BC(3),Ymax/20);
pBL3 = makepointer(j*BL(3),Ymax/20);
```

Octave-Datei: `loesung_03_05.m` (Fortsetzung)

```
% Darstellung des Zeigerdiagramms der Admittanzen bei f = f0/2
hFig3 = figure("Name","Zeigerdiagramm der Admittanzen bei f = f0/2");
hPlot3 = plot(pY1*1e3,"k",pG1*1e3,"r",(pBL1-Ymax/100)*1e3,"b",...
         (pBL1(2)+pBC1+Ymax/100)*1e3,"g");
% Der Zeiger pBL1 wird leicht nach links versetzt, der Zeiger pBC1 wird
% leicht nach rechts versetzt und beginnt an der Zeigerspitze von pBL1.
axis([-Ymax,Ymax,-Ymax,Ymax]*1e3);
axis square;
grid on;
title("\\bf Zeigerdiagramm der Admittanzen bei f = f0/2","FontSize",14);
xlabel("Re\\{Y\\} / mS","FontSize",12);
ylabel("Im\\{Y\\} / mS","FontSize",12);
legend(hPlot3,"Y","G","B_L","B_C","location","southeastoutside");

% Darstellung des Zeigerdiagramms der Admittanzen bei f = f0
hFig4 = figure("Name","Zeigerdiagramm der Admittanzen bei f = f0");
hPlot4 = plot((pY2+j*Ymax/100)*1e3,"k",(pG2-j*Ymax/100)*1e3,"r",...
              (pBL2-Ymax/100)*1e3,"b",(pBL2(2)+pBC2+Ymax/100)*1e3,"g");
% Der Zeiger pBL2 wird leicht nach links versetzt, der Zeiger pBC2 wird
% leicht nach rechts versetzt und beginnt an der Zeigerspitze von pBL2.
% Der Zeiger pY2 wird leicht nach oben und der Zeiger pG2 wird leicht
% nach unten versetzt.
axis([-Ymax,Ymax,-Ymax,Ymax]*1e3);
axis square;
grid on;
title("\\bf Zeigerdiagramm der Admittanzen bei f = f0","FontSize",14);
xlabel("Re\\{Y\\} / mS","FontSize",12);
ylabel("Im\\{Y\\} / mS","FontSize",12);
legend(hPlot4,"Y","G","B_L","B_C","location","southeastoutside");

% Darstellung des Zeigerdiagramms der Admittanzen bei f = 2f0
hFig5 = figure("Name","Zeigerdiagramm der Admittanzen bei f = 2f0");
hPlot5 = plot(pY3*1e3,"k",pG3*1e3,"r",(pBL3-Ymax/100)*1e3,"b",...
         (pBL3(2)+pBC3+Ymax/100)*1e3,"g");
% Der Zeiger pBL3 wird leicht nach links versetzt, der Zeiger pBC3 wird
% leicht nach rechts versetzt und beginnt an der Zeigerspitze von pBL3.
axis([-Ymax,Ymax,-Ymax,Ymax]*1e3);
axis square;
grid on;
title("\\bf Zeigerdiagramm der Admittanzen bei f = 2f0","FontSize",14);
xlabel("Re\\{Y\\} / mS","FontSize",12);
ylabel("Im\\{Y\\} / mS","FontSize",12);
legend(hPlot5,"Y","G","B_L","B_C","location","southeastoutside");
```

Übung 3.6 Impedanzen

Die im Bild dargestellte Schaltung ist zu untersuchen.



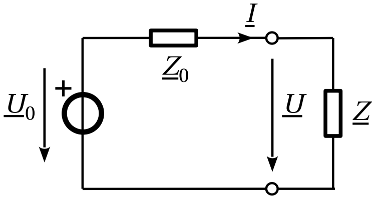
$R_1 = 100\ \Omega$
$R_2 = 10\ \mathrm{k}\Omega$
$L = 22\ \mathrm{mH}$
$C = 470\ \mathrm{nF}$

a) Bestimmen Sie die Impedanz $\underline{Z}$ und den Scheinwiderstand $Z = |\underline{Z}|$.

b) Berechnen Sie für die Frequenzen 100 Hz, 500 Hz, 1 kHz, 2 kHz, 4 kHz und 5 kHz die Werte X_L, X_C, $\underline{Z}$, $|\underline{Z}|$ und $\arg \underline{Z}$.

c) Bei welchen Frequenzen wird $\underline{Z}$ rein reell? Bestimmen Sie $\underline{Z}$ bei diesen Frequenzen.

Die Impedanz $\underline{Z}$ wird nun an eine Spannungsquelle mit dem Innenwiderstand $\underline{Z}_0$ und der Quellspannung $u_0(t) = \hat{u}_0 \cos 2\pi f_0 t$ angeschlossen, wobei $\hat{u}_0 = 5\ \mathrm{V}$ und $f_0 = 1\ \mathrm{kHz}$ beträgt.



d) Geben Sie die komplexe Amplitude $\underline{U}_0$ an. Beachten Sie dabei, dass sich der Betrag auf den Effektivwert und nicht auf den Spitzenwert bezieht.

e) Wie muss $\underline{Z}_0$ gewählt werden, damit $\arg \underline{I} = \arg \underline{U}_0$ ist? Geben Sie eine geeignete Schaltung für $\underline{Z}_0$ an und bestimmen Sie die Bauteilwerte.

Lösung der Übungsaufgabe 3.6 (Seite 121)

a) Impedanz und Scheinwiderstand

$$\underline{Z} = \left(R_1 + \mathrm{j}\omega L\right) \| R_2 \| \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1 + \mathrm{j}\omega L} + \dfrac{1}{R_2} + j\omega C}$$

$$= \frac{R_2(R_1 + \mathrm{j}\omega L)}{R_1 + R_2 - \omega^2 R_2 LC + \mathrm{j}\omega(L + R_1 R_2 C)}$$

$$= \frac{R_1 R_2 (R_1 + R_2) + \omega^2 \left(R_2 L(L + R_1 R_2 C) - R_1 R_2^2 LC\right)}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2\left((L + R_1 R_2 C)^2 - 2(R_1 + R_2) R_2 LC\right) + \omega^4 (R_2 LC)^2}$$

$$+ \mathrm{j}\,\frac{\omega\left(R_2 L(R_1 + R_2) - R_1 R_2 (L + R_1 R_2 C)\right) - \omega^3 R_2^2 L^2 C}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2\left((L + R_1 R_2 C)^2 - 2(R_1 + R_2) R_2 LC\right) + \omega^4 (R_2 LC)^2}$$

$$|\underline{Z}| = \sqrt{\underline{Z}^* \underline{Z}} = \sqrt{(\mathrm{Re}\,\underline{Z})^2 + (\mathrm{Im}\,\underline{Z})^2}$$

$$\varphi = \arg \underline{Z} = \arctan \frac{\mathrm{Im}\,\underline{Z}}{\mathrm{Re}\,\underline{Z}}$$

Bei der Berechnung des Winkels ist im Allgemeinen der Darstellungsbereich der arctan-Funktion zu beachten. Passive Impedanzen und Admittanzen weisen aber immer positive Realteile auf, so dass der Winkel stets im Bereich $-180° \leq \varphi \leq +180°$ liegt. Damit muss bei der Anwendung der arctan-Funktion keine Fallunterscheidung vorgenommen werden.

b) Impedanz und Blindwiderstände bei bestimmten Frequenzen

$$X_L = \omega L \qquad X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

f / kHz	X_L / Ω	X_C / Ω	$\underline{Z}$ / Ω	$\lvert\underline{Z}\rvert$ / Ω	$\arg \underline{Z}$
0,1	13,8	−3386	99,7 + j 10,7	100	6°
0,5	69,1	−677	119,6 + j 55,7	132	25°
1,0	138,2	−338	225 + j 114	252	27°
2,0	276,4	−169	141 − j 303	334	−65°
4,0	552,9	−84,7	4,11 − j 99,2	99,3	−88°
5,0	691,1	−67,7	1,7 − j 74,8	74,9	−89°

c) Bestimmung der Nullstellen von Im $\underline{Z}$

Der Imaginärteil der Impedanz ist eine gebrochen rationale Funktion 4. Grades. Jede gebrochen rationale Funktion vom Grad n weist genau n Nullstellen und n Polstellen auf. Es ist somit nicht ausreichend nur die Nullstellen des Zählers von Im $\underline{Z}$ zu finden, also

$$\omega\big(R_2 L(R_1+R_2) - R_1 R_2 (L + R_1 R_2 C)\big) - \omega^3 R_2^2 L^2 C = 0$$

zu lösen. Sofern der Nennergrad (wie hier) den Zählergrad übersteigt erhalten wir eine weitere Nullstelle bei der Frequenz unendlich. Die Differenz von Nenner- und Zählergrad gibt die Vielfachheit dieser Nullstelle an.

$$\omega_1 = 0 \qquad \underline{Z}\Big|_{\omega=\omega_1} = 99\,\Omega$$

$$\omega_2 = \infty \qquad \underline{Z}\Big|_{\omega=\omega_2} = 0$$

$$\omega_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{R_2 L(R_1+R_2) - R_1 R_2 (L + R_1 R_2 C)}{R_2^2 L^2 C}} = \pm 8720{,}7\ \mathrm{s}^{-1} \qquad \underline{Z}\Big|_{\omega=\omega_{3,4}} = 447{,}2\,\Omega$$

$$f_{3,4} = \pm\frac{\omega_{3,4}}{2\pi} = \pm 1387{,}9\ \mathrm{Hz}$$

Negative Frequenzen werden in der Regel nicht zur Kennzeichnung bzw. Beschreibung von Schaltkreisen verwendet, da die Impedanz eine symmetrische Funktion der Frequenz ist. Der Realteil und der Scheinwiderstand sind gerade Funktionen in ω, der Imaginärteil und der Winkel sind ungerade Funktionen in ω.

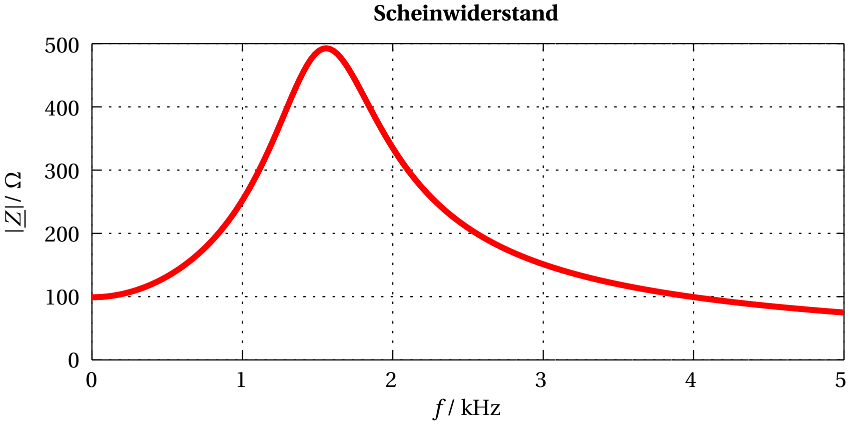
Es empfiehlt sich, immer die Schaltung bei den Frequenzen $f = 0$ und $f = \infty$ zu betrachten. Bei $f = 0$ (Gleichstromfall) können Induktivitäten durch Kurzschlüsse und Kapazitäten durch Unterbrechungen ersetzt werden. Wir sehen in diesem Fall die Parallelschaltung von R_1 und R_2. Für die Impedanz erhalten wir somit

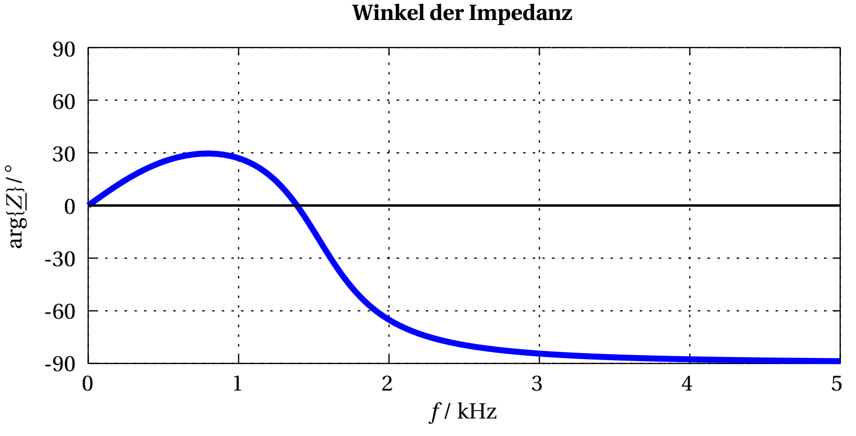
$$\underline{Z}\Big|_{\omega=0} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 99\,\Omega\,.$$

Strebt die Frequenz gegen unendlich, so können Induktivitäten durch Unterbrechungen und Kapazitäten durch Kurzschlüsse ersetzt werden. Hier verschwindet also der Blindwiderstand der Kapazität C, die beiden Eingangsklemmen werden kurzgeschlossen und die Impedanz nimmt den Wert null an.

Da die Blindwiderstände reaktiver Bauelemente bei den Frequenzen null und unendlich entweder verschwinden oder über alle Grenzen wachsen, können wir ableiten, dass Impedanzen (und damit auch Admittanzen) bei diesen Frequenzen immer rein reelle Werte annehmen oder unendlich werden.

Betrag und Winkel der Impedanz über der Frequenz





d) Komplexe Amplitude

$$u_0(t) = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\,\underline{U}_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}\right\} \qquad \text{mit} \quad \underline{U}_0 = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u} = \frac{5\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}0} = 3{,}536\,\mathrm{V}$$

e) Wahl der Impedanz $\underline{Z}_0$

Die Forderung lautet $\arg \underline{I} = \arg \underline{U}_0$, d. h., Quellspannung und Quellstrom sollen in Phase liegen. Der Zusammenhang zwischen beiden Größen ist durch

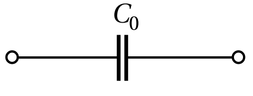
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z} + \underline{Z}_0}$$

gegeben. Die Summe $\underline{Z} + \underline{Z}_0$ muss somit bei der Frequenz $f_0 = 1\,\mathrm{kHz}$ reell sein. Die Impedanz $\underline{Z}_0$ muss daher so gewählt werden, dass die Bedingung $\arg(\underline{Z} + \underline{Z}_0) = 0$ bei $f_0 = 1\,\mathrm{kHz}$ erfüllt ist. Die Impedanz $\underline{Z}_0$ muss also den Imaginärteil von $\underline{Z}$ kompensieren. Der Realteil von $\underline{Z}_0$ kann dabei beliebig gewählt werden.

$$\underline{Z}\Big|_{f_0=1\,\mathrm{kHz}} = (225 + \mathrm{j}\,114)\,\Omega$$

$$\mathrm{Im}\{\underline{Z}_0\} = -\,\mathrm{Im}\{\underline{Z}\} = -114\,\Omega \quad \text{(kapazitiv)}$$

$$C_0 = \frac{-1}{2\pi f_0\,\mathrm{Im}\{\underline{Z}_0\}} = \frac{-1}{2\pi \cdot 1\,\mathrm{kHz} \cdot (-114\,\Omega)} = 1{,}39\,\mu\mathrm{F}$$



Octave-Datei: `loesung_03_06.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 3.6

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
R1 = 100;      % Ohm
R2 = 10e3;     % Ohm
L  = 22e-3;    % H
C  = 470e-9;   % F
u0 = 5;        % V
f0 = 1e3;      % Hz
disp("Vorgaben");
disp(["  R1 = ",num2str(R1)," Ohm"]);
disp(["  R2 = ",num2str(R2)," Ohm"]);
disp(["  L  = ",num2str(L*1e3)," mH"]);
disp(["  C  = ",num2str(C*1e9)," nF"]);
disp(["  u0 = ",num2str(u0)," V"]);
disp(["  f0 = ",num2str(f0*1e-3)," kHz"]);
disp(" ");

% ========================================================
% Funktion zur Berechnung der Impedanz
function Z = impedanz(f,R1,R2,L,C)
w = 2*pi*f;
Z = R2*(R1+j*w*L)./(R1+R2-(w.^2)*R2*L*C+j*w*(L+R1*R2*C));
endfunction
% ========================================================

% Impedanz und Blindwiderstände
fi  = [100,500,1e3,2e3,4e3,5e3]; % Hz
Z   = impedanz(fi,R1,R2,L,C);
XL  = 2*pi*fi*L;
XC  = -1./(2*pi*fi*C);
ZZ  = abs(Z); % Scheinwiderstand
phi = angle(Z)*180/pi; % Winkel in Grad
disp("Impedanz und Blindwiderstände");
disp("f/kHz\tXL/Ohm\tXC/Ohm\tZ/Ohm\t\t|Z|/Ohm\tphi/Grad");
for i=1:length(fi)
  disp([num2str(fi(i)*1e-3,4),"\t",num2str(XL(i),4),"\t",...
        num2str(XC(i),4),"\t",num2str(Z(i),5),"\t",...
        num2str(ZZ(i),5),"\t",num2str(phi(i),4)]);
endfor
disp(" ");
```

Octave-Datei: `loesung_03_06.m` (Fortsetzung)

```
% Rein reele Impedanz (Frequenzen)
w0 = sqrt((R2*L*(R1+R2)-R1*R2*(L+R1*R2*C))/((R2^2)*(L^2)*C));
wi = [0,Inf,w0,-w0];
Zi = impedanz(wi/(2*pi),R1,R2,L,C); % Reelle Impedanz
disp("Impedanz wird rein reell bei den Frequenzen");
disp("omega/s^-1\tf/Hz\t\tZ/Ohm");
for i=1:length(wi)
  disp([num2str(wi(i),4),"\t\t",num2str(wi(i)/(2*pi),5),"\t\t",...
        num2str(Zi(i),4)]);
endfor
disp(" ");

% Komplexe Amplitude
U0 = u0/sqrt(2);
disp("Komplexe Amplitude");
disp(["  U0 = ",num2str(U0)," V (arg U0 = 0°)"]);
disp(" ");

% Strom und Quellspannung in Phase
disp("Wahl von Z0");
Z = impedanz(f0,R1,R2,L,C);
Z0 = -j*imag(Z);
C0 = -1/(2*pi*f0*imag(Z0));
disp(["Bei f0 = ",num2str(f0*1e-3)," kHz gilt"]);
disp(["  Z = ",num2str(Z)," Ohm"]);
disp([" Z0 = ",num2str(Z0)," Ohm (Realteil ist beliebig)"]);
disp("Realisierung durch Kapazität");
disp([" C0 = ",num2str(C0*1e6)," uF"]);
disp(" ");

% Grenzen des Darstellungsbereichs
fmin = 0;
fmax = 5e3; % Hz

% Festlegung der Stützstellen
N = 200;
n = 0:(N-1);

% Frequenzachse erstellen
f = n*(fmax-fmin)/(N-1)+fmin;

% Impedanz
Z = impedanz(f,R1,R2,L,C);
```

Octave-Datei: `loesung_03_06.m` (Fortsetzung)

```
% Darstellung des Scheinwiderstands
hFig1 = figure("Name","Scheinwiderstand");
hPlot1 = plot(f*1e-3,abs(Z),"r"); % f in kHz, |Z| in Ohm
grid on;
title("\\bf Scheinwiderstand über der Frequenz","FontSize",14);
xlabel("f / kHz","FontSize",12);
ylabel("|Z| / \\Omega","FontSize",12);

% Darstellung des Winkels
hFig2 = figure("Name","Winkel der Impedanz");
hPlot2 = plot(f*1e-3,angle(Z)*180/pi,"b"); % f in kHz, arg(Z) in Grad
grid on;
title("\\bf Winkel der Impedanz über der Frequenz","FontSize",14);
xlabel("f / kHz","FontSize",12);
ylabel("arg(Z) / Grad","FontSize",12);
```

Übung 3.7 Effektivwerte und Scheinwiderstand

Eine unbekannte reale Spule wird an eine Wechselspannungsquelle mit variabler Frequenz angeschlossen. Die Effektivspannung der Quelle beträgt $U = 12\,\mathrm{V}$. Bei der Frequenz $f_1 = 50\,\mathrm{Hz}$ fließt durch die Spule der Effektivstrom $I_1 = 60\,\mathrm{mA}$, bei $f_2 = 100\,\mathrm{Hz}$ reduziert sich der Strom auf $I_2 = 40\,\mathrm{mA}$.

a) Skizzieren Sie die Ersatzschaltung der realen Spule.

b) Bestimmen Sie den Scheinwiderstand der Spule bei beiden Frequenzen und leiten Sie daraus die Parameter der Ersatzschaltung ab.

An der Spule soll bei der Frequenz 50 Hz nur eine Effektivspannung von 6 V anliegen. Um dies zu erreichen, wird ein (idealer) Kondensator in Reihe zur Spule geschaltet.

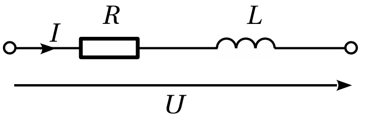
c) Berechnen Sie die Kapazität C des Serienkondensators.

d) Skizzieren Sie das Zeigerdiagramm der Impedanz dieser Schaltung.

e) Wie groß ist nun der Effektivstrom durch die Spule und welche Effektivspannung fällt dabei am Kondensator ab?

Lösung der Übungsaufgabe 3.7 (Seite 122)

a) Ersatzschaltung der realen Spule



Bei den Größen U und I handelt es sich um die Effektivwerte von Spannung und Strom . Die Phasenlagen von U und I sind unbekannt.

b) Scheinwiderstand und Parameter der Ersatzschaltung

$f = f_1 = 50\ \text{Hz}: \qquad Z_1 = U/I_1 = 200\ \Omega$

$f = f_2 = 100\ \text{Hz}: \qquad Z_2 = U/I_2 = 300\ \Omega$

$$\underline{Z}_1 = R + \mathrm{j}2\pi f_1 L \qquad \Rightarrow \qquad Z_1 = |\underline{Z}_1| = \sqrt{R^2 + 4\pi^2 f_1^2 L^2}$$

$$\underline{Z}_2 = R + \mathrm{j}2\pi f_2 L \qquad \Rightarrow \qquad Z_2 = |\underline{Z}_2| = \sqrt{R^2 + 4\pi^2 f_2^2 L^2}$$

Die Quadrate der Scheinwiderstände bei den zwei Frequenzen sind gegeben durch

$$Z_1^2 = R^2 + 4\pi^2 f_1^2 L^2 = (200\ \Omega)^2 \qquad (3.1)$$

und

$$Z_2^2 = R^2 + 4\pi^2 f_2^2 L^2 = (300\ \Omega)^2 \,. \qquad (3.2)$$

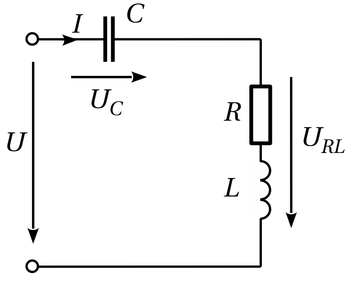
Durch Subtraktion von (3.1) und (3.2) wird R eliminiert und wir erhalten

$$L = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Z_2^2 - Z_1^2}{f_2^2 - f_1^2}} = 411\ \text{mH} \,.$$

Multiplizieren wir (3.1) mit f_2^2 und (3.2) mit f_1^2, so wird L bei der Subtraktion beider Gleichungen eliminiert.

$$R = \sqrt{\frac{f_2^2 Z_1^2 - f_1^2 Z_2^2}{f_2^2 - f_1^2}} = 153\ \Omega$$

c) Reihenschaltung mit Kondensator



Der Effektivwert der Spannung an der realen Spule U_{RL} soll halb so groß sein, wie der Effektivwert der Spannung U an den Eingangsklemmen der Reihenschaltung.

Die Kapazität C ist so zu dimensionieren, dass die Bedingung

$$\frac{\underline{U}_{RL}}{\underline{U}} = \frac{|\underline{U}_{RL}|}{|\underline{U}|} = \frac{1}{2} \tag{3.3}$$

erfüllt ist. Die Spannungsteilerregel liefert uns

$$\frac{\underline{U}_{RL}}{\underline{U}} = \frac{R + \mathrm{j}2\pi f_1 L}{R + \mathrm{j}\left(2\pi f_1 L - 1/(2\pi f_1 C)\right)} . \tag{3.4}$$

Zur weiteren Berechnung betrachten wir die Betragsquadrate der komplexen Amplituden und erhalten aus (3.3) und (3.4)

$$\frac{|\underline{U}_{RL}|^2}{|\underline{U}|^2} = \frac{R^2 + 4\pi^2 f_1^2 L^2}{R^2 + \left(2\pi f_1 L - \dfrac{1}{2\pi f_1 C}\right)^2} = \frac{1}{4} . \tag{3.5}$$

Aus (3.5) erhalten wir für C eine quadratische Gleichung

$$\frac{1}{C^2} - 8\pi^2 f_1^2 L \frac{1}{C} = 4\pi^2 f_1^2 \left(3R^2 + 12\pi^2 f_1^2 L^2\right)$$

mit den Lösungen

$$C_{1/2} = \frac{1}{4\pi^2 f_1^2 L \pm 2\pi f_1 \sqrt{3R^2 + 16\pi^2 f_1^2 L^2}} .$$

$$C_1 = \quad 6{,}38\,\mu\mathrm{F}$$

$$C_2 = -13{,}2\,\mu\mathrm{F} \quad \text{(nicht realisierbar)}$$

Alternativ kann die Kapazität auch über die Wirk-, Blind- und Scheinwiderstände bei der Frequenz $f = f_1 = 50$ Hz bestimmt werden. Der Scheinwiderstand der realen Spule ist $Z_{RL} = Z_1 = 200\ \Omega$. Damit beträgt bei einer Effektivspannung $U_{RL} = 6$ V der Effektivstrom durch die Reihenschaltung $I = U_{RL}/Z_{RL} = 30$ mA. Der Scheinwiderstand der Gesamtschaltung muss also

$$Z = Z_{RLC} = \frac{U_{RLC}}{I} = \frac{U}{I} = \frac{12\text{ V}}{30\text{ mA}} = 400\ \Omega$$

betragen. Mit

$$\underline{Z} = R + j(X_L + X_C) \qquad \Rightarrow \qquad Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2}$$

also

$$Z^2 = R^2 + (X_L + X_C)^2$$

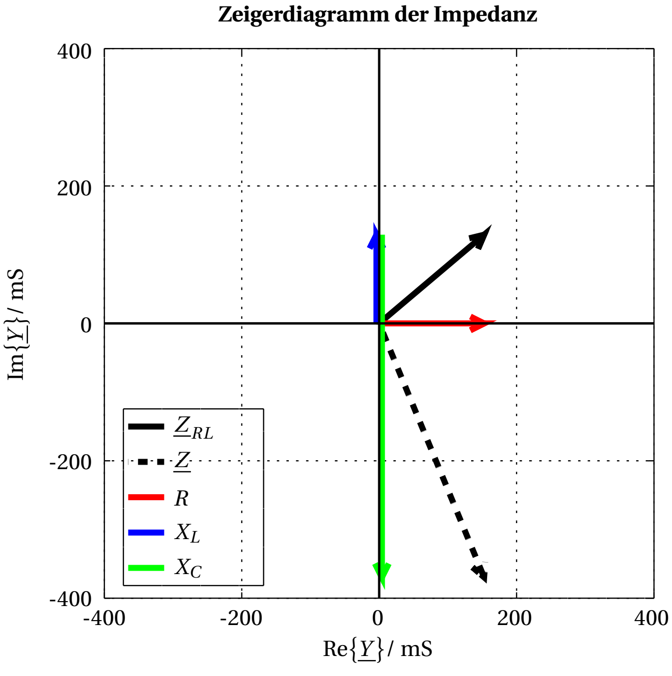
bestimmen wir den Blindwiderstand der Kapazität

$$X_C = \pm\sqrt{Z^2 - R^2} - X_L ,$$

wobei $R = 153\ \Omega$ und $X_L = 2\pi f_1 L = 129\ \Omega$ sind. Wir erhalten die beiden Lösungen $X_{C1} = 241\ \Omega$ und $X_{C2} = -499\ \Omega$. Nur ein negativer Blindwiderstand (zweite Lösung) lässt sich mit einer Kapazität realisieren.

$$C = -\frac{1}{2\pi f_1 X_C} = 6{,}38\,\mu\mathrm{F}$$

d) Zeigerdiagramm der Impedanz



Zur grafischen Lösung des Problems muss der Blindwiderstand der Kapazität so gewählt werden, dass der Betrag des Zeigers $\underline{Z}_{RLC}$ genau doppelt so groß ist, wie der Betrag des Zeigers $\underline{Z}_{RL}$. Die zweite Lösung (posiver Blindwiderstand bzw. negative Kapazität) kann mit einer Induktivität realisiert werden. Der Winkel des Zeigers $\underline{Z}_{RLC}$ ist dann positiv und größer als der Winkel des Zeigers $\underline{Z}_{RL}$.

e) Effektivstrom durch die Spule und Effektivspannung über dem Kondensator

Da sich die Spannung über der Spule von ursprünglich 12 V auf 6 V halbiert, beträgt der Effektivstrom nun $I = I_1/2 = 30$ mA. Da auch der Blindwiderstand X_C bekannt ist, lässt sich die Effektivspannung über der Kapazität sehr einfach bestimmen.

$$U_C = Z_C I = |X_C| I = 499\ \Omega \cdot 30\ \text{mA} = 14{,}97\ \text{V}$$

Hier tritt eine Spannungsüberhöhung auf. Bei der Schaltung handelt es sich um einen verlustbehafteten Reihenschwingkreis, der nahe an der Resonanzfrequenz

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 98{,}28\ \text{Hz}$$

betrieben wird.

Octave-Datei: `loesung_03_07.m`

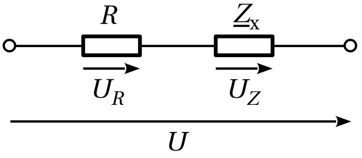
```
% Lösung der Übungsaufgabe 3.7

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
U  = 12;      % V
I1 = 60e-3;   % A
I2 = 40e-3;   % A
f1 = 50;      % Hz
f2 = 100;     % Hz
disp("Vorgaben");
disp(["  U  = ",num2str(U)," V"]);
disp(["  I1 = ",num2str(I1*1e3)," mA"]);
disp(["  I2 = ",num2str(I2*1e3)," mA"]);
disp(["  f1  = ",num2str(f1)," Hz"]);
disp(["  f2  = ",num2str(f2)," Hz"]);
disp(" ");

% Scheinwiderstand der Spule
Z1 = U/I1;
Z2 = U/I2;
disp("Scheinwiderstand der Spule");
disp(["Z1 = ",num2str(Z1)," Ohm bei f1 = ",num2str(f1)," Hz"]);
disp(["Z2 = ",num2str(Z2)," Ohm bei f2 = ",num2str(f2)," Hz"]);
disp(" ");

% Parameter der Ersatzschaltung
R = sqrt((((f2*Z1)^2)-((f1*Z2)^2))/(f2^2-f1^2));
L = sqrt((Z2^2-Z1^2)/(f2^2-f1^2))/(2*pi);
disp("Parameter der Ersatzschaltung");
disp(["  R  = ",num2str(R)," Ohm"]);
disp(["  L  = ",num2str(L*1e3)," mH"]);
disp(" ");

% Reihenschaltung mit Kondensator
C = 1/(4*((pi*f1)^2)*L+2*pi*f1*sqrt(3*(R^2)+16*(pi*f1*L)^2));
disp("Reihenschaltung mit Kondensator");
disp(["  C  = ",num2str(C*1e6)," uF"]);
disp(" ");

% Strom durch Spule und Spannung über Kondensator
I = I1/2;
UC = I/(2*pi*f1*C);
disp("Strom durch Spule und Spannung über Kondensator");
disp(["  I  = ",num2str(I*1e3)," mA"]);
disp(["  UC = ",num2str(UC)," V"]);
disp(" ");
```

Octave-Datei: `loesung_03_07.m` (Fortsetzung)

```
% Resonanzfrequenz
f0 = 1/(2*pi*sqrt(L*C));
disp("Resonanzfrequenz");
disp(["  f0  = ",num2str(f0)," Hz"]);
disp(" ");

% Impedanzen und Blindwiderstände
XL = 2*pi*f1*L;
XC = -1/(2*pi*f1*C);
Z  = R+j*(XL+XC);
ZRL = R+j*XL;

% ==========================================================
% Funktion zur grafischen Darstellung eines Zeigers
function pX = makepointer(x,s)
x = x(:);
d = x*s./abs(x);
pX = [zeros(length(x),1),x,x-d*(1+j/2),x,x-d*(1-j/2)].';
endfunction
% ==========================================================

% Erzeugung der Zeiger (Linie und Pfeilspitze)
Zmax = 400; % Ohm  (Skalierung des Zeigerdiagramms der Impedanzen)
pR = makepointer(R,Zmax/20);
pXL = makepointer(j*XL,Zmax/20);
pXC = makepointer(j*XC,Zmax/20);
pZ = makepointer(Z,Zmax/20);
pZRL = makepointer(ZRL,Zmax/20);

% Darstellung des Zeigerdiagramms der Impedanzen
hFig1 = figure("Name","Zeigerdiagramm der Impedanzen");
hPlot1 = plot(pZRL,"k--",pZ,"k",pR,"r",(pXL-Zmax/100),"b",...
         (pXL(2)+pXC+Zmax/100),"g");
% Der Zeiger pXL wird leicht nach links versetzt, der Zeiger pXC wird
% leicht nach rechts versetzt und beginnt an der Zeigerspitze von pXL.
axis([-Zmax,Zmax,-Zmax,Zmax]);
axis square;
grid on;
title("\\bf Zeigerdiagramm der Impedanzen","FontSize",14);
xlabel("Re\\{Z\\} / \\Omega","FontSize",12);
ylabel("Im\\{Z\\} / \\Omega","FontSize",12);
legend(hPlot1,"Z_{RL}","Z","R","X_L","X_C","location","southeastoutside");
```

Übung 3.8 Effektivspannungsmessung

In der hier abgebildeten Reihenschaltung aus einem Widerstand $R = 470\,\Omega$ und einer unbekannten Impedanz $\underline{Z}_\mathrm{x}$ werden die Effektivspannungen U_R, U_Z und U gemessen. Die Frequenz der anliegenden Spannungen beträgt $f = 50$ Hz.



$U_R = 4{,}2$ V

$U_Z = 3{,}4$ V

$U = 6{,}3$ V

a) Welchen Wert hat die unbekannte Impedanz $\underline{Z}_\mathrm{x}$ und wie groß ist deren Scheinwiderstand $Z_\mathrm{x} = |\underline{Z}_\mathrm{x}|$?

b) Skizzieren Sie die vollständigen Schaltungen und die Zeigerdiagramme der Spannungen $\underline{U}_R$, $\underline{U}_Z$ sowie $\underline{U}$ (komplexe Amplituden) und ermitteln Sie die Werte der Bauelemente, wenn $\underline{Z}_\mathrm{x}$ realisiert wird durch

- i) die Reihenschaltung eines Widerstandes R_1 und einer Induktivität L_1,
- ii) die Parallelschaltung eines Widerstandes R_2 und einer Induktivität L_2,
- iii) die Reihenschaltung eines Widerstandes R_3 und einer Kapazität C_3,
- iv) die Parallelschaltung eines Widerstandes R_4 und einer Kapazität C_4.

Lösung der Übungsaufgabe 3.8 (Seite 122)

a) Impedanz $\underline{Z}_x$ und Scheinwiderstand $Z_x = |\underline{Z}_x|$

Aus der Spannung über dem Widerstand R ergibt sich sofort der Strom durch die unbekannte Impedanz $\underline{Z}_x$. Da uns lediglich Effektivwerte bekannt sind, können wir zunächst nur den Scheinwiderstand $Z_x = |\underline{Z}_x|$ berechnen.

$$I = \frac{U_R}{R} \qquad \text{(Effektivwert des Stromes)}$$

$$Z_x = \frac{U_Z}{I} = \frac{U_Z}{U_R} R = \frac{3{,}4\,\text{V}}{4{,}2\,\text{V}} \cdot 470\,\Omega = 380{,}5\,\Omega$$

Nun drücken wir die unbekannte Impedanz $\underline{Z}_x$ durch den Wirkanteil R_x und den Blindanteil X_x aus und erhalten einige Zusammenhänge, aus denen wir schlussendlich den Real- sowie den Imaginärteil der unbekannten Impedanz ermitteln können.

unbekannte Impedanz	$\underline{Z}_x = R_x + \mathrm{j}\,X_x$		
Scheinwiderstand	$Z_x = \lvert\underline{Z}_x\rvert = \sqrt{R_x^2 + X_x^2}$	$\Rightarrow$	$Z_x^2 = R_x^2 + X_x^2$
Gesamtimpedanz	$\underline{Z} = R + R_x + \mathrm{j}\,X_x$		
Gesamtscheinwiderstand	$Z = \lvert\underline{Z}\rvert = \sqrt{(R+R_x)^2 + X_x^2}$	$\Rightarrow$	$Z^2 = (R+R_x)^2 + X_x^2$

$$Z_x^2 = \left(\frac{U_Z}{U_R} R\right)^2 = R_x^2 + X_x^2$$

$$Z^2 = \left(\frac{U}{U_R} R\right)^2 = (R+R_x)^2 + X_x^2$$

Die Subtraktion der beiden Gleichungen liefert uns den Realteil R_x der unbekannten Impedanz.

$$Z^2 - Z_x^2 = (R+R_x)^2 - R_x^2 = \left(\frac{U}{U_R} R\right)^2 - \left(\frac{U_Z}{U_R} R\right)^2$$

$$= R^2 + 2\,R\,R_x + R_x^2 - R_x^2 = \frac{U^2 - U_Z^2}{U_R^2} R^2$$

$$R_x = \frac{1}{2\,R}\left(\frac{U^2 - U_Z^2}{U_R^2} R^2 - R^2\right)$$

$$R_x = \frac{R}{2} \cdot \frac{U^2 - U_Z^2 - U_R^2}{U_R^2} = \frac{470\,\Omega}{2} \cdot \frac{(6{,}3\,\text{V})^2 - (3{,}4\,\text{V})^2 - (4{,}2\,\text{V})^2}{(4{,}2\,\text{V})^2}$$

$$R_x = 139{,}75\,\Omega$$

Nun können wir, bis auf das Vorzeichen, auch den Blindanteil X_x bestimmen.

$$X_x = \pm\sqrt{Z_x^2 - R_x^2} = \pm\sqrt{\left(\frac{U_Z}{U_R} R\right)^2 - R_x^2} = \pm\sqrt{\left(\frac{3{,}4\,\text{V}}{4{,}2\,\text{V}} \cdot 470\,\Omega\right)^2 - (139{,}75\,\Omega)^2}$$

$$X_x = \pm 353{,}88\,\Omega$$

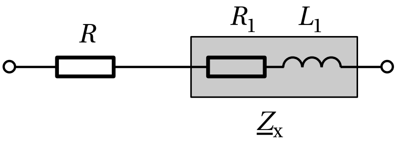
Die angegebenen Spannungsverhältnisse in der Schaltung können sich sowohl bei einer induktiven als auch bei einer kapazitiven Impedanz $\underline{Z}_x$ einstellen.

Aufgrund der Effektivwertmessung kann die Impedanz $\underline{Z}_x$ nicht eindeutig bestimmt werden. Das Vorzeichen von $\mathrm{Im}\{\underline{Z}_x\}$ kann sowohl positiv als auch negativ sein, d. h., die gemessenen Effektivwerte können sowohl bei einer induktiven als auch einer kapazitiven Impedanz auftreten. Es sind also zwei Lösungen möglich:

$$\underline{Z}_{x1} = (139{,}75 + \mathrm{j}\,353{,}88)\ \Omega \qquad \text{(induktiv)}$$
$$\underline{Z}_{x2} = (139{,}75 - \mathrm{j}\,353{,}88)\ \Omega \qquad \text{(kapazitiv)}$$

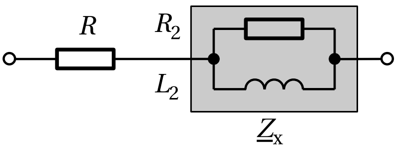
b) Bauelementwerte und Zeigerdiagramme

i) Reihenschaltung aus Widerstand R_1 und Induktivität L_1
Annahme: $\underline{Z}_x = \underline{Z}_{x1} = (139{,}75 + \mathrm{j}\,353{,}88)\ \Omega$



$$\underline{Z}_x = R_1 + \mathrm{j}\,2\pi f L_1 = (139{,}75 + \mathrm{j}\,353{,}88)\ \Omega$$
$$R_1 = \mathrm{Re}\{\underline{Z}_x\} = 139{,}75\ \Omega$$
$$L_1 = \frac{\mathrm{Im}\{\underline{Z}_x\}}{2\pi f} = \frac{353{,}88\ \Omega}{2\pi \cdot 50\ \mathrm{Hz}} = 1{,}126\ \mathrm{H}$$

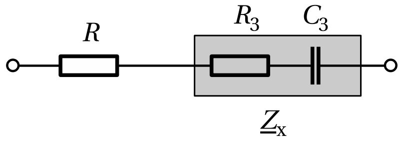
ii) Parallelschaltung aus Widerstand R_2 und Induktivität L_2
Annahme: $\underline{Z}_x = \underline{Z}_{x1} = (139{,}75 + \mathrm{j}\,353{,}88)\ \Omega$



$$\underline{Y}_x = \frac{1}{\underline{Z}_x} = \frac{1}{(139{,}75 + \mathrm{j}\,353{,}88)\ \Omega} = (0{,}965 - \mathrm{j}\,2{,}445)\ \mathrm{mS}$$
$$\underline{Y}_x = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\mathrm{j}\,2\pi f L_2} = \frac{1}{R_2} + \mathrm{j}\,\frac{-1}{2\pi f L_2}$$
$$R_2 = \frac{1}{\mathrm{Re}\{\underline{Y}_x\}} = \frac{1}{0{,}965\ \mathrm{mS}} = 1035{,}9\ \Omega$$
$$L_2 = \frac{-1}{2\pi f\,\mathrm{Im}\{\underline{Y}_x\}} = \frac{1}{2\pi \cdot 50\ \mathrm{Hz} \cdot 2{,}445\ \mathrm{mS}} = 1{,}3\ \mathrm{H}$$

iii) Reihenschaltung aus Widerstand R_3 und Kapazität C_3

Annahme: $\underline{Z}_\mathrm{x} = \underline{Z}_\mathrm{x2} = (139{,}75 - \mathrm{j}\,353{,}88)\ \Omega$



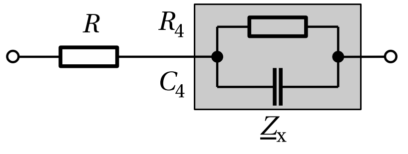
$$\underline{Z}_\mathrm{x} = R_3 + \frac{1}{\mathrm{j}\,2\pi f C_3} = R_3 + \mathrm{j}\,\frac{-1}{2\pi f C_3} = (139{,}75 - \mathrm{j}\,353{,}88)\ \Omega$$

$$R_3 = \mathrm{Re}\{\underline{Z}_\mathrm{x}\} = 139{,}75\ \Omega$$

$$C_3 = \frac{-1}{2\pi f\,\mathrm{Im}\{\underline{Z}_\mathrm{x}\}} = \frac{1}{2\pi \cdot 50\ \mathrm{Hz} \cdot 353{,}88\ \Omega} = 8{,}995\ \mu\mathrm{F}$$

iv) Parallelschaltung aus Widerstand R_4 und Kapazität C_4

Annahme: $\underline{Z}_\mathrm{x} = \underline{Z}_\mathrm{x2} = (139{,}75 - \mathrm{j}\,353{,}88)\ \Omega$



$$\underline{Y}_\mathrm{x} = \frac{1}{\underline{Z}_\mathrm{x}} = \frac{1}{(139{,}75 - \mathrm{j}\,353{,}88)\ \Omega} = (0{,}965 + \mathrm{j}\,2{,}445)\ \mathrm{mS}$$

$$\underline{Y}_\mathrm{x} = \frac{1}{R_4} + \mathrm{j}\,2\pi f C_4$$

$$R_4 = \frac{1}{\mathrm{Re}\{\underline{Y}_\mathrm{x}\}} = \frac{1}{0{,}965\ \mathrm{mS}} = 1035{,}9\ \Omega$$

$$C_4 = \frac{\mathrm{Im}\{\underline{Y}_\mathrm{x}\}}{2\pi f} = \frac{2{,}445\ \mathrm{mS}}{2\pi \cdot 50\ \mathrm{Hz}} = 7{,}781\ \mu\mathrm{F}$$

Zeigerdiagramme

Zur Darstellung der Zeigerdiagramme sind hier nur zwei Fälle zu unterscheiden: induktive Impedanz und kapazitive Impedanz. Die interne Realisierung der Impedanzen spielt dabei keine Rolle.

Da keine absolute Phasenlage angegeben ist, beziehen wir uns hier auf die Spannung am Widerstand R und legen so eine Referenzphase fest. Wir ordnen dieser Spannung die Phase null zu, indem wir die zugehörige komplexe Amplitude durch

$$\underline{U}_R = U_R \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,0^\circ} = 4{,}2\ \mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,0^\circ}$$

definieren. Damit sind die Phasenlagen der anderen Spannungen festgelegt.

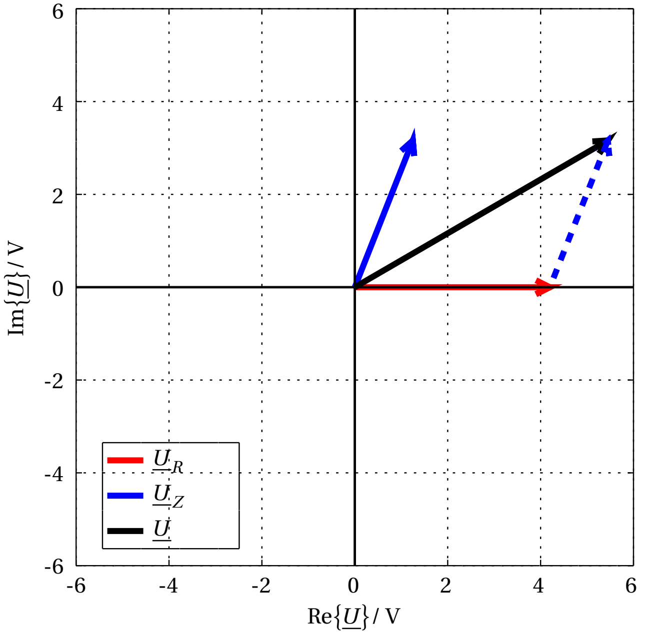
- induktive Impedanz: $\underline{Z}_\mathrm{x} = \underline{Z}_\mathrm{x1} = \left(139{,}75 + \mathrm{j}353{,}88\right)\,\Omega$

$$\underline{U}_R = U_R \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,0^\circ} = 4{,}2\,\mathrm{V}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,0^\circ}$$

$$\underline{U}_Z = \frac{\underline{Z}_\mathrm{x}}{R}\cdot \underline{U}_R = 3{,}4\,\mathrm{V}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,68{,}5^\circ}$$

$$\underline{U} = \frac{R + \underline{Z}_\mathrm{x}}{R}\cdot \underline{U}_R = 6{,}3\,\mathrm{V}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,30{,}1^\circ}$$

Zeigerdiagramm bei induktiver Impedanz



Der Strom durch die induktive Impedanz liegt in Phase mit der Spannung $\underline{U}_R$ über dem Widerstand R. An induktiven Impedanzen eilt die Spannung dem Strom voraus, deshalb ist der Zeiger der Spannung $\underline{U}_Z$ entgegen dem Uhrzeigersinn gedreht. Wird dieser Zeiger an das Ende von $\underline{U}_R$ verschoben, so ergibt sich das Spannungsdreieck. Die Kirchhoff'sche Spannungsregel $\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_Z$ ist hier vektoriell dargestellt.

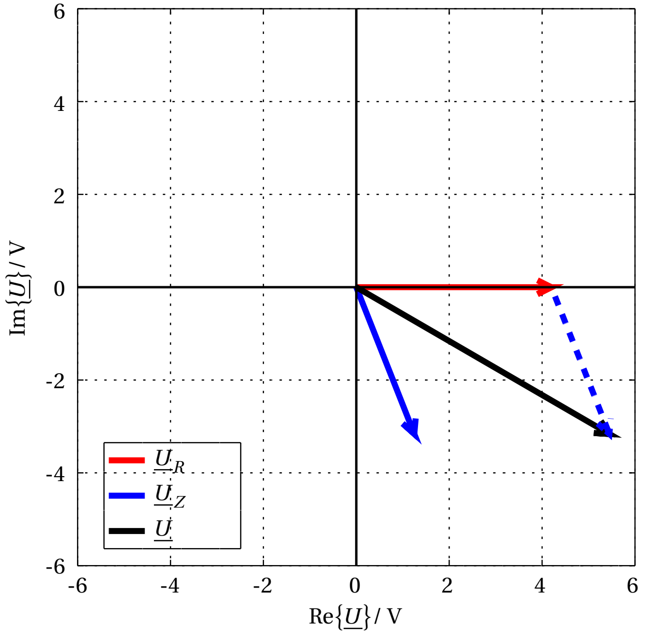
- kapazitive Impedanz: $\underline{Z}_x = \underline{Z}_{x2} = \left(139{,}75 - j\,353{,}88\right)\,\Omega$

$$\underline{U}_R = U_R \cdot e^{j\,0^\circ} = 4{,}2\,\mathrm{V} \cdot e^{j\,0^\circ}$$

$$\underline{U}_Z = \frac{\underline{Z}_x}{R} \cdot \underline{U}_R = 3{,}4\,\mathrm{V} \cdot e^{-j\,68{,}5^\circ}$$

$$\underline{U} = \frac{R + \underline{Z}_x}{R} \cdot \underline{U}_R = 6{,}3\,\mathrm{V} \cdot e^{-j\,30{,}1^\circ}$$

Zeigerdiagramm bei kapazitiver Impedanz



Der Strom durch die kapazitive Impedanz liegt in Phase mit der Spannung $\underline{U}_R$ über dem Widerstand R. An kapazitiven Impedanzen eilt die Spannung dem Strom nach, deshalb ist der Zeiger der Spannung $\underline{U}_Z$ im Uhrzeigersinn gedreht. Wird dieser Zeiger an das Ende von $\underline{U}_R$ verschoben, so ergibt sich das Spannungsdreieck. Die Kirchhoff'sche Spannungsregel $\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_Z$ ist hier vektoriell dargestellt.

Die Längen der Zeiger, d. h., die Beträge der Spannungen sind bei induktiver und kapazitiver Impedanz gleich groß. Lediglich die Phasenverschiebung wechselt das Vorzeichen. Aus diesem Grund gibt es genau zwei Lösungen, wenn nur die Effektivwerte der Spannungen bekannt sind. Die interne Realisierung der Impedanzen spielt bei unserer Betrachtung keine Rolle. Sie wirkt sich nur auf die Strom- und Spannungsverteilung im Inneren der Impedanzen aus.

Octave-Datei: `loesung_03_08.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 3.8

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
UR = 4.2;     % V
UZ = 3.4;     % V
U  = 6.3;     % V
R  = 470;     % Ohm
f  = 50;      % Hz
disp("Vorgaben");
disp(["  UR  = ",num2str(UR)," V"]);
disp(["  UZ  = ",num2str(UZ)," V"]);
disp(["  U   = ",num2str(U)," V"]);
disp(["  f   = ",num2str(f)," Hz"]);
disp(" ");

% Scheinwiderstand der unbekannten Impedanz
Zx = UZ*R/UR;
disp("Scheinwiderstand der unbekannten Impedanz");
disp(["  Zx  = ",num2str(Zx)," Ohm"]);
disp(" ");

% Wirk- und Blindanteil der unbekannten Impedanz
Rx = R*(U^2-UZ^2-UR^2)/(2*UR^2);
Xx = sqrt(Zx^2-Rx^2);
disp("Unbekannte Impedanz");
disp(["  Rx  = ",num2str(Rx)," Ohm"]);
disp(["  Xx1 = +",num2str(Xx)," Ohm"]);
disp(["  Xx2 = -",num2str(Xx)," Ohm"]);
disp(" ");

% Realisierung durch Reihenschaltung von R1 und L1
R1 = Rx;
L1 = Xx/(2*pi*f);
disp("Reihenschaltung von R1 und L1");
disp(["  R1   = ",num2str(R1)," Ohm"]);
disp(["  L1   = ",num2str(L1)," H"]);
disp(" ");

% Realisierung durch Parallelschaltung von R2 und L2
R2 = 1/(real(1/(Rx+j*Xx)));
L2 = -1/(2*pi*f*imag(1/(Rx+j*Xx)));
disp("Parallelschaltung von R2 und L2");
disp(["  R2   = ",num2str(R2)," Ohm"]);
disp(["  L2   = ",num2str(L2)," H"]);
disp(" ");
```

Octave-Datei: `loesung_03_08.m` (Fortsetzung)

```
% Realisierung durch Reihenschaltung von R3 und C3
R3 = Rx;
C3 = 1/(2*pi*f*Xx);
disp("Reihenschaltung von R3 und C3");
disp(["  R3   = ",num2str(R3)," Ohm"]);
disp(["  C3   = ",num2str(C3*1e6)," uF"]);
disp(" ");

% Realisierung durch Parallelschaltung von R4 und C4
R4 = 1/(real(1/(Rx+j*Xx)));
C4 = -imag(1/(Rx+j*Xx))/(2*pi*f);
disp("Parallelschaltung von R4 und C4");
disp(["  R4   = ",num2str(R4)," Ohm"]);
disp(["  C4   = ",num2str(C4*1e6)," uF"]);
disp(" ");

% Komplexe Spannungen (induktive Impedanz)
URi = UR*exp(j*0); % Festlegung der Bezugsphase
UZi = UR*(Rx+j*Xx)/R;
Ui = UR*(R+Rx+j*Xx)/R;
disp("Komplexe Spannungen an induktiver Impedanz");
disp(["   URi     = (",num2str(URi),") V"]);
disp(["  |URi|    = ",num2str(abs(URi))," V"]);
disp(["  arg(URi) = ",num2str(angle(URi)*180/pi)," Grad"]);
disp(["   UZi     = (",num2str(UZi),") V"]);
disp(["  |UZi|    = ",num2str(abs(UZi))," V"]);
disp(["  arg(UZi) = ",num2str(angle(UZi)*180/pi)," Grad"]);
disp(["   Ui      = (",num2str(Ui),") V"]);
disp(["  |Ui|     = ",num2str(abs(Ui))," V"]);
disp(["  arg(Ui)  = ",num2str(angle(Ui)*180/pi)," Grad"]);
disp(" ");

% Komplexe Spannungen (kapazitive Impedanz)
URc = UR*exp(j*0); % Festlegung der Bezugsphase
UZc = UR*(Rx-j*Xx)/R;
Uc = UR*(R+Rx-j*Xx)/R;
disp("Komplexe Spannungen an kapazitiver Impedanz");
disp(["   URc     = (",num2str(URc),") V"]);
disp(["  |URc|    = ",num2str(abs(URc))," V"]);
disp(["  arg(URc) = ",num2str(angle(URc)*180/pi)," Grad"]);
disp(["   UZc     = (",num2str(UZc),") V"]);
disp(["  |UZc|    = ",num2str(abs(UZc))," V"]);
disp(["  arg(UZc) = ",num2str(angle(UZc)*180/pi)," Grad"]);
disp(["   Uc      = (",num2str(Uc),") V"]);
disp(["  |Uc|     = ",num2str(abs(Uc))," V"]);
disp(["  arg(Uc)  = ",num2str(angle(Uc)*180/pi)," Grad"]);
disp(" ");
```

Octave-Datei: `loesung_03_08.m` (Fortsetzung)

```
% ==========================================================
% Funktion zur grafischen Darstellung eines Zeigers
function pX = makepointer(x,s)
x = x(:);
d = x*s./abs(x);
pX = [zeros(length(x),1),x,x-d*(1+j/2),x,x-d*(1-j/2)].';
endfunction
% ==========================================================

% Erzeugung der Zeiger (Linie und Pfeilspitze)
Umax = 6; % V  (Skalierung der Zeigerdiagramme)
pURi = makepointer(URi,Umax/20);
pUZi = makepointer(UZi,Umax/20);
pUi  = makepointer(Ui,Umax/20);
pURc = makepointer(URc,Umax/20);
pUZc = makepointer(UZc,Umax/20);
pUc  = makepointer(Uc,Umax/20);

% Darstellung des Zeigerdiagramms bei induktiver Impedanz
hFig1 = figure("Name","Zeigerdiagramm bei induktiver Impedanz");
hPlot1 = plot(pURi,"r",pUZi,"b",pUi,"k",(pURi(2)+pUZi),"b--");
axis([-Umax,Umax,-Umax,Umax]);
axis square;
grid on;
title("\\bf Zeigerdiagramm bei induktiver Impedanz","FontSize",14);
xlabel("Re\\{U\\} / V","FontSize",12);
ylabel("Im\\{U\\} / V","FontSize",12);
legend(hPlot1,"U_R","U_Z","U","location","southeastoutside");

% Darstellung des Zeigerdiagramms bei kapazitiver Impedanz
hFig2 = figure("Name","Zeigerdiagramm bei kapazitiver Impedanz");
hPlot2 = plot(pURc,"r",pUZc,"b",pUc,"k",(pURc(2)+pUZc),"b--");
axis([-Umax,Umax,-Umax,Umax]);
axis square;
grid on;
title("\\bf Zeigerdiagramm bei kapazitiver Impedanz","FontSize",14);
xlabel("Re\\{U\\} / V","FontSize",12);
ylabel("Im\\{U\\} / V","FontSize",12);
legend(hPlot2,"U_R","U_Z","U","location","southeastoutside");
```

Übung 3.9 Strom- und Spannungsquellen

Eine reale Gleichstromquelle wird an den Anschlussklemmen mit dem Widerstand $R_1 = 390\,\Omega$ belastet. An R_1 fällt dabei die Spannung $U_1 = 14\,\text{V}$ ab. Nun wird R_1 durch $R_2 = 470\,\Omega$ ersetzt. Der Spannungsabfall über R_2 beträgt $U_2 = 14{,}8\,\text{V}$.

a) Skizzieren Sie die Schaltung.

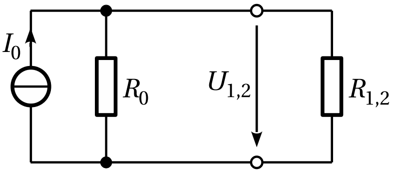
b) Berechnen Sie den Quellstrom I_0 und den Innenwiderstand R_0 der Stromquelle.

c) Wie groß sind Kurzschlussstrom I_K und Leerlaufspannung U_L der Stromquelle?

d) Ersetzen Sie die Stromquelle durch eine äquivalente Spannungsquelle. Skizzieren Sie die Schaltung und geben Sie die Leerlaufspannung U_0 sowie den Innenwiderstand R_0' der Spannungsquelle an.

Lösung der Übungsaufgabe 3.9 (Seite 122)

a) Schaltung



b) Quellstrom I_0 und Innenwiderstand R_0

$$U_1 = \frac{R_1\,R_0}{R_1 + R_0}\,I_0 \quad \Rightarrow \quad U_1\,R_1 + U_1\,R_0 = R_1\,R_0\,I_0 \tag{3.6}$$

$$U_2 = \frac{R_2\,R_0}{R_2 + R_0}\,I_0 \quad \Rightarrow \quad U_2\,R_2 + U_2\,R_0 = R_2\,R_0\,I_0 \tag{3.7}$$

Durch Division der Gleichungen (3.6) und (3.7) wird I_0 eliminiert.

$$\frac{U_1\,R_1 + U_1\,R_0}{U_2\,R_2 + U_2\,R_0} = \frac{R_1}{R_2} \quad \Rightarrow \quad R_0 = \frac{U_2 - U_1}{U_1/R_1 - U_2/R_2} \approx 181{,}5\,\Omega$$

Nun stellen wir die Gleichungen (3.6) und (3.7) um und klammern R_0 aus.

$$U_1\,R_1 = (R_1\,I_0 - U_1)\,R_0 \tag{3.8}$$

$$U_2\,R_2 = (R_2\,I_0 - U_2)\,R_0 \tag{3.9}$$

Bei der Division der Gleichungen (3.8) und (3.9) wird nun R_0 eliminiert.

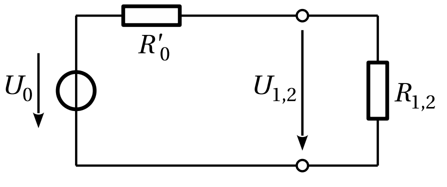
$$\frac{U_1\,R_1}{U_2\,R_2} = \frac{R_1\,I_0 - U_1}{R_2\,I_0 - U_2} \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{(R_2 - R_1)\,U_1\,U_2}{(U_2 - U_1)\,R_1\,R_2} \approx 113\text{ mA}$$

c) Kurzschlussstrom und Leerlaufspannung

$$I_K = I_0 \approx 113\text{ mA}$$

$$U_L = R_0\,I_0 \approx 20{,}5\text{ V}$$

d) Ersatzspannungsquelle



$$U_0 = U_L \approx 20{,}5\text{ V}$$

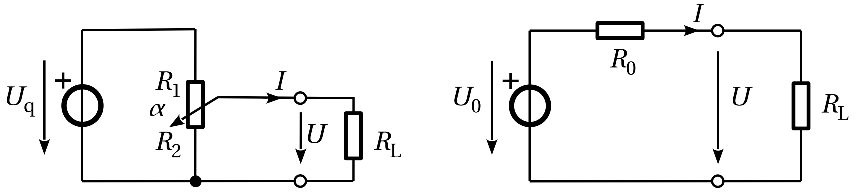
$$R'_0 = R_0 \approx 181{,}5\,\Omega$$

Octave-Datei: `loesung_03_09.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 3.9

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
U1 = 14;       % V
U2 = 14.8;     % V
R1 = 390;      % Ohm
R2 = 470;      % Ohm
disp("Vorgaben");
disp(["  U1  = ",num2str(U1)," V"]);
disp(["  U2  = ",num2str(U2)," V"]);
disp(["  R1  = ",num2str(R1)," Ohm"]);
disp(["  R2  = ",num2str(R2)," Ohm"]);
disp(" ");

% Quellstrom und Innenwiderstand
I0 = ((R2-R1)*U1*U2)/((U2-U1)*R1*R2);
R0 = (U2-U1)/(U1/R1-U2/R2);
disp("Quellstrom und Innenwiderstand");
disp(["  I0  = ",num2str(I0*1e3)," mA"]);
disp(["  R0  = ",num2str(R0)," Ohm"]);
disp(" ");

% Kurzschlussstrom und Leerlaufspannung
IK = I0;
UL = I0*R0;
disp("Kurzschlussstrom und Leerlaufspannung");
disp(["  IK  = ",num2str(IK*1e3)," mA"]);
disp(["  UL  = ",num2str(UL)," V"]);
disp(" ");
```

Übung 3.10 Belasteter Spannungsteiler

Der belastete Spannungsteiler wird mit der Gleichspannung U_q gespeist und soll durch eine Ersatzspannungsquelle mit der Quellspannung U_0 und dem Innenwiderstand R_0 dargestellt werden.



Belasteter Spannungsteiler — Ersatzspannungsquelle

Der Widerstand $R = R_1 + R_2$ des Potenziometers ist bekannt, das Teilerverhältnis wird durch die Position des Schleifers $0 \le \alpha \le 1$ beschrieben, d. h., $R_1 = (1-\alpha)R$ und $R_2 = \alpha R$.

a) Berechnen Sie die Quellspannung U_0 der Ersatzspannungsquelle und den Innenwiderstand R_0. Beide Größen sind von der Schleiferposition α abhängig.

b) Geben Sie die Spannung $U = U(\alpha)$ und den Strom $I = I(\alpha)$ am Ausgang in Abhängigkeit von der Position des Schleifers an.

c) Stellen Sie die normierte Größe $U = U(\alpha)/U_q$ als Kurvenschar für $R_L = 2R$, $R_L = R$ und $R_L = R/2$ in einem Diagramm über α dar.

Lösung der Übungsaufgabe 3.10 (Seite 123)

a) Parameter der Ersatzspannungsquelle

Quellspannung U_0

Die Quellspannung U_0 einer Ersatzspannungsquelle entspricht der Leerlaufspannung U_L der zu ersetzenden Schaltung und stellt sich bei $R_\mathrm{L} = \infty$ ein.

$$U_0 = U_0(\alpha) = U\Big|_{R_\mathrm{L}=\infty} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\,U_\mathrm{q} = \frac{\alpha\,R}{R}\,U_\mathrm{q} = \alpha\,U_\mathrm{q}$$

Innenwiderstand R_0

Zur Bestimmung des Innenwiderstands werden in der zu ersetzenden Schaltung alle Quellen abgeschaltet ($U_{0i} = 0$ und $I_{0i} = 0$) und die Schaltung wird im Leerlauf betrieben. Abgeschaltete Spannungsquellen werden durch Kurzschlüsse (Durchverbindung) und abgeschaltete Stromquellen durch Leerläufe (Unterbrechungen) realisiert. (Der Innenwiderstand einer realen Spannungsquelle ist null, der einer idealen Stromquelle unendlich.)

$$R_0 = R_0(\alpha) = R_1||R_2 = \frac{R_1\,R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(1-\alpha)\,R\,\alpha\,R}{R} = (1-\alpha)\alpha\,R$$

Alternativ: Bestimmung des Kurzschlussstroms I_K

Der Quellstrom I_0 einer Ersatzstromquelle entspricht dem Kurzschlussstrom I_K der zu ersetzenden Schaltung und stellt sich bei $R_\mathrm{L} = 0$ ein. Der Innenwiderstand einer Ersatzquelle ist durch den Quotienten aus Leerlaufspannung und Kurzschlussstrom gegeben.

$$I_\mathrm{K} = I_\mathrm{K}(\alpha) = I\Big|_{R_\mathrm{L}=0} = \frac{U_\mathrm{q}}{R_1} = \frac{U_\mathrm{q}}{(1-\alpha)\,R}$$

$$R_0 = \frac{U_\mathrm{L}}{I_\mathrm{K}} = \frac{\alpha\,U_\mathrm{q}}{U_\mathrm{q}/\big((1-\alpha)\,R\big)} = (1-\alpha)\alpha\,R$$

b) Spannung und Strom an den Klemmen

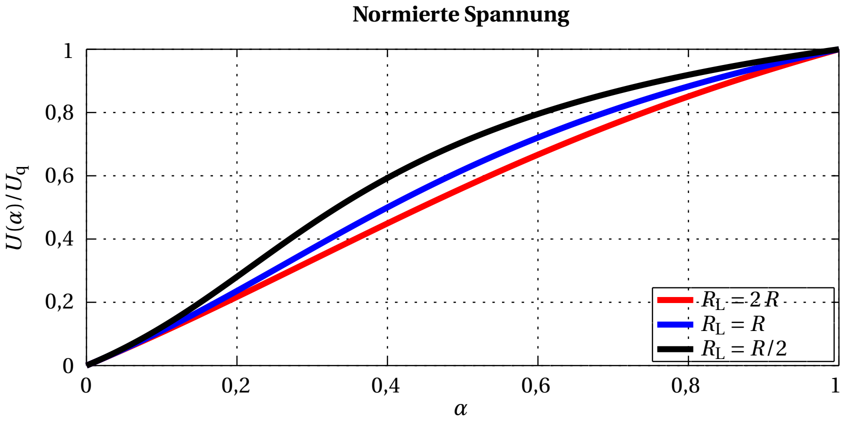
Wir betrachten die Ersatzschaltung und wenden die Spannungsteilerregel an.

$$U = U(\alpha) = \frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{L} + R_0(\alpha)}\,U_0(\alpha) = \frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{L} + (1-\alpha)\alpha\,R}\,\alpha\,U_\mathrm{q} = \frac{\alpha\,R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{L} + (1-\alpha)\alpha\,R}\,U_\mathrm{q}$$

$$I = I(\alpha) = \frac{U(\alpha)}{R_\mathrm{L}} = \frac{\alpha}{R_\mathrm{L} + (1-\alpha)\alpha\,R}\,U_\mathrm{q}$$

c) Diagramm der normierten Spannung an den Klemmen

$$\frac{U(\alpha)}{U_q} = \frac{\alpha}{1 + (1-\alpha)\alpha\, R/R_L}$$

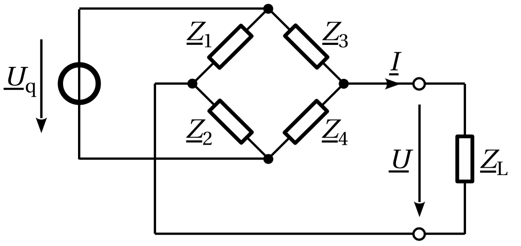


Octave-Datei: `loesung_03_10.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 3.10

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
alpha_min = 0; % Einstellbereich des
alpha_max = 1; % Potentiometers
r = [0.5,1,2]; % Widerstandsverhältnis R/RL

% Festlegung der Stützstellen
N = 200;
n = 0:(N-1);
alpha = n*(alpha_max-alpha_min)/(N-1)+alpha_min;

% Normierte Spannung (y = U/Uq)
y = zeros(length(alpha),length(r));
for i = 1:length(r)
  y(:,i) = alpha./(1+(1-alpha).*alpha*r(i));
endfor

% Darstellung der normierten Spannung
hFig1 = figure("Name","Normierte Spannung");
hPlot1 = [];
c = "rbk";
s = {"R/R_L = 1/2","R/R_L = 1","R/R_L = 2"};
hold on;
for i = 1:length(r)
  hPlot1 = [hPlot1,plot(y(:,i),alpha,c(i))];
endfor
hold off;
grid on;
legend(hPlot1,s,"location","southeast");
title("\\bf Normierte Spannung","FontSize",14);
xlabel("\\alpha ","FontSize",12);
ylabel("U(\\alpha) / U_q","FontSize",12);
```

Übung 3.11 Brückenschaltung

Die dargestellte Brückenschaltung wird mit einer Wechselspannung $\underline{U}_q$ gespeist und durch die Impedanz $\underline{Z}_L$ belastet.



a) Bestimmen Sie die Spannungen $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{U}_3$ und $\underline{U}_4$ an den Impedanzen $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ und $\underline{Z}_4$ sowie die Ströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ und $\underline{I}_4$ durch die jeweiligen Impedanzen im Leerlauffall, d. h. für $\underline{Z}_L = \infty$.

b) Bestimmen Sie die Spannungen $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{U}_3$ und $\underline{U}_4$ an den Impedanzen $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ und $\underline{Z}_4$ sowie die Ströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ und $\underline{I}_4$ durch die jeweiligen Impedanzen im Kurzschlussfall, d. h. für $\underline{Z}_L = 0$.

Die Brückenschaltung soll nun durch eine Ersatzspannungsquelle mit der Quellspannung $\underline{U}_0$ und der Innenimpedanz $\underline{Z}_0$ ersetzt werden. Die Brücke ist nicht abgeglichen.

c) Skizzieren Sie die Ersatzschaltung.

d) Berechnen Sie die Quellspannung $\underline{U}_0$ und die Innenimpedanz $\underline{Z}_0$.

e) Ermitteln Sie die Spannung $\underline{U}$ und den Strom $\underline{I}$ für eine beliebige Lastimpedanz $\underline{Z}_L$.

Lösung der Übungsaufgabe 3.11 (Seite 123)

a) Spannungen und Ströme bei Leerlauf ($\underline{I} = 0$ bzw. $\underline{Z}_\mathrm{L} = \infty$)

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{U}_\mathrm{q} \qquad \underline{U}_3 = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}\underline{U}_\mathrm{q}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{U}_\mathrm{q} \qquad \underline{U}_4 = \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}\underline{U}_\mathrm{q}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_\mathrm{q}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \qquad \underline{I}_3 = \underline{I}_4 = \frac{\underline{U}_\mathrm{q}}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}$$

b) Spannungen und Ströme bei Kurzschluss ($\underline{U} = 0$ bzw. $\underline{Z}_\mathrm{L} = 0$)

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_3 = \frac{\underline{Z}_1 || \underline{Z}_3}{(\underline{Z}_1 || \underline{Z}_3) + (\underline{Z}_2 || \underline{Z}_4)}\underline{U}_\mathrm{q} = \frac{\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}}{\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} + \dfrac{\underline{Z}_2\underline{Z}_4}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4}}\underline{U}_\mathrm{q}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{\underline{Z}_2\underline{Z}_4(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1\underline{Z}_3(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4)}}\underline{U}_\mathrm{q} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_1\underline{Z}_3(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_2\underline{Z}_4(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)}\underline{U}_\mathrm{q}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_4 = \frac{\underline{Z}_2 || \underline{Z}_4}{(\underline{Z}_1 || \underline{Z}_3) + (\underline{Z}_2 || \underline{Z}_4)}\underline{U}_\mathrm{q} = \frac{\dfrac{\underline{Z}_2\underline{Z}_4}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4}}{\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} + \dfrac{\underline{Z}_2\underline{Z}_4}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4}}\underline{U}_\mathrm{q}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_2\underline{Z}_4(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)}}\underline{U}_\mathrm{q} = \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_4(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1\underline{Z}_3(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_2\underline{Z}_4(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)}\underline{U}_\mathrm{q}$$

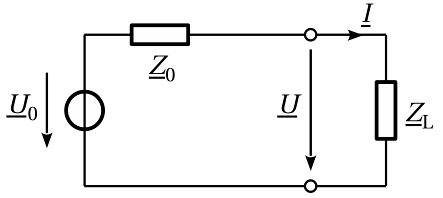
$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_\mathrm{q}\underline{Z}_3(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_1\underline{Z}_3(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_2\underline{Z}_4(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}_\mathrm{q}\underline{Z}_4(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1\underline{Z}_3(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_2\underline{Z}_4(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{U}_\mathrm{q}\underline{Z}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_1\underline{Z}_3(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_2\underline{Z}_4(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)}$$

$$\underline{I}_4 = \frac{\underline{U}_4}{\underline{Z}_4} = \frac{\underline{U}_\mathrm{q}\underline{Z}_2(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1\underline{Z}_3(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_2\underline{Z}_4(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)}$$

c) Ersatzschaltung



d) Quellspannung $\underline{U}_0$ und Innenimpedanz $\underline{Z}_0$

Leerlaufspannung ($\underline{I} = 0$ bzw. $\underline{Z}_L = \infty$)

$$\underline{U}_L = \underline{U}\Big|_{\underline{Z}_L=\infty} = \underline{U}_4\Big|_{\underline{Z}_L=\infty} - \underline{U}_2\Big|_{\underline{Z}_L=\infty}$$

$$\underline{U}_L = \left(\frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3+\underline{Z}_4} - \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}\right)\underline{U}_q = \frac{\underline{Z}_4\left(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2\right) - \underline{Z}_2\left(\underline{Z}_3+\underline{Z}_4\right)}{\left(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2\right)\left(\underline{Z}_3+\underline{Z}_4\right)}\underline{U}_q$$

$$\underline{U}_0 = \underline{U}_L = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_4 - \underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\left(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2\right)\left(\underline{Z}_3+\underline{Z}_4\right)}\underline{U}_q$$

Kurzschlussstrom ($\underline{U} = 0$ bzw. $\underline{Z}_L = 0$)

$$\underline{I}_K = \underline{I}\Big|_{\underline{Z}_L=0} = \underline{I}_3\Big|_{\underline{Z}_L=0} - \underline{I}_4\Big|_{\underline{Z}_L=0}$$

$$\underline{I}_K = \frac{\underline{Z}_1\left(\underline{Z}_2+\underline{Z}_4\right) - \underline{Z}_2\left(\underline{Z}_1+\underline{Z}_3\right)}{\underline{Z}_1\underline{Z}_3\left(\underline{Z}_2+\underline{Z}_4\right)+\underline{Z}_2\underline{Z}_4\left(\underline{Z}_1+\underline{Z}_3\right)}\underline{U}_q = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_4 - \underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1\underline{Z}_3\left(\underline{Z}_2+\underline{Z}_4\right)+\underline{Z}_2\underline{Z}_4\left(\underline{Z}_1+\underline{Z}_3\right)}\underline{U}_q$$

Innenimpedanz $\underline{Z}_0 = \underline{U}_L / \underline{I}_K$

$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{U}_L}{\underline{I}_K} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3\left(\underline{Z}_2+\underline{Z}_4\right)+\underline{Z}_2\underline{Z}_4\left(\underline{Z}_1+\underline{Z}_3\right)}{\left(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2\right)\left(\underline{Z}_3+\underline{Z}_4\right)}$$

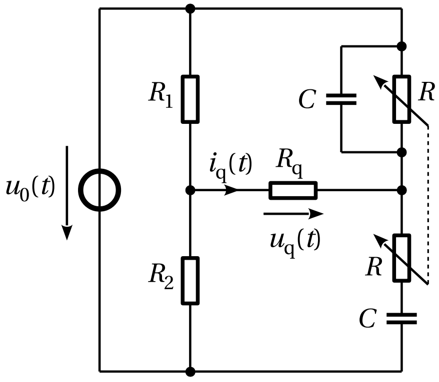
e) Spannung $\underline{U}$ und Strom $\underline{I}$ bei beliebiger Belastung $\underline{Z}_L$

$$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_0+\underline{Z}_L}\underline{U}_0 = \frac{\left(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2\right)\left(\underline{Z}_3+\underline{Z}_4\right)\underline{Z}_L}{\underline{Z}_1\underline{Z}_3\left(\underline{Z}_2+\underline{Z}_4\right)+\underline{Z}_2\underline{Z}_4\left(\underline{Z}_1+\underline{Z}_3\right)+\left(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2\right)\left(\underline{Z}_3+\underline{Z}_4\right)\underline{Z}_L}\underline{U}_q$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_L} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_0+\underline{Z}_L} = \frac{\left(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2\right)\left(\underline{Z}_3+\underline{Z}_4\right)}{\underline{Z}_1\underline{Z}_3\left(\underline{Z}_2+\underline{Z}_4\right)+\underline{Z}_2\underline{Z}_4\left(\underline{Z}_1+\underline{Z}_3\right)+\left(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2\right)\left(\underline{Z}_3+\underline{Z}_4\right)\underline{Z}_L}\underline{U}_q$$

Übung 3.12 Wien-Robinson-Brücke

Die im Bild dargestellte Brückenschaltung wird zur Frequenzmessung verwendet. An die Schaltung wird die Spannung $u_0(t) = \hat{u}_0 \cos(2\pi f t)$ angelegt. Der Widerstand R_2 ist durch $R_2 = 2R_1$ gegeben. Der Abgleich der Brücke ist abhängig von der Frequenz f der Spannung $u_0(t)$ und erfolgt durch Variation des Doppelpotenziometers R.



a) Wie groß sind $u_q(t)$ und $i_q(t)$, wenn die Brücke abgeglichen ist?

b) Geben Sie die Abgleichbedingung für diese Brückenschaltung an.

c) Wie lässt sich die Frequenz f aus dem eingestellten Widerstand ermitteln.

Nun wird die Brücke abgeglichen. Dabei beträgt $R = 1592\,\Omega$ und $C = 100$ nF.

d) Wie groß ist die Frequenz f?

Lösung der Übungsaufgabe 3.12 (Seite 124)

a) Strom und Spannung im Querzweig bei abgeglichener Brücke

$$u_q(t) = 0 \quad \text{und} \quad i_q(t) = 0 \quad \forall t$$

b) Abgleichbedingung

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\dfrac{R/(\mathrm{j}2\pi fC)}{R+1/(\mathrm{j}2\pi fC)}}{R+1/(\mathrm{j}2\pi fC)}$$

$$\frac{R_1}{2R_1} = \frac{R/(\mathrm{j}2\pi fC)}{\big(R+1/(\mathrm{j}2\pi fC)\big)\cdot\big(R+1/(\mathrm{j}2\pi fC)\big)}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\mathrm{j}2\pi fRC}{(1+\mathrm{j}2\pi fRC)\cdot(1+\mathrm{j}2\pi fRC)}$$

c) Frequenzbestimmung

$$\frac{1}{2} = \frac{\mathrm{j}2\pi fRC}{(1+\mathrm{j}2\pi fRC)\cdot(1+\mathrm{j}2\pi fRC)}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\mathrm{j}2\pi fRC}{1-(2\pi fRC)^2+\mathrm{j}4\pi fRC}$$

$$\mathrm{j}4\pi fRC = 1-(2\pi fRC)^2+\mathrm{j}4\pi fRC$$

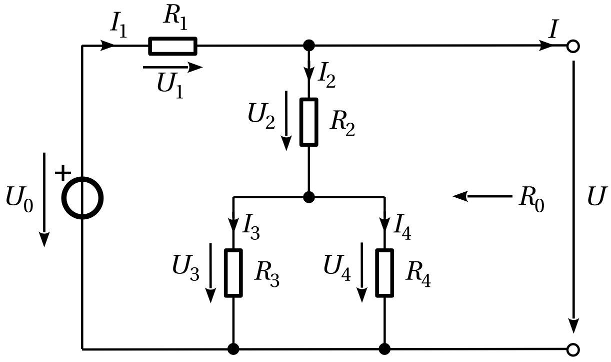
$$0 = 1-(2\pi fRC)^2 \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{1}{2\pi RC}$$

d) Frequenzberechnung

$$f = \frac{1}{2\pi\cdot 1592\,\Omega\cdot 100\,\mathrm{nF}} = 1\,\mathrm{kHz}$$

Übung 3.13 Widerstandsnetzwerk

In der abgebildeten Schaltung speist eine ideale Gleichspannungsquelle ein Widerstandsnetzwerk.



$R_1 = 1\ \text{k}\Omega$

$R_2 = 250\ \Omega$

$R_3 = 1\ \text{k}\Omega$

$R_4 = 3\ \text{k}\Omega$

$U_0 = 12\ \text{V}$

a) Berechnen Sie die Spannungen U_1, U_2, U_3, U_4 und die Ströme I_1, I_2, I_3, I_4.

b) Wie groß sind die Spannung U und der Strom I?

c) Berechnen Sie den Innenwiderstand R_0 der Schaltung.

Jetzt wird an die Klemmen der Schaltung ein Widerstand R angeschlossen.

d) Welchen Wert muss der Widerstand R haben, damit sich die Spannung U halbiert? Wie groß sind dann die Spannungen und Ströme im Netzwerk?

e) Stellen Sie in jeweils einem Diagramm die Verläufe von U und I über R dar, wenn der Widerstand R im Bereich $0 \leq R < 5R$ variiert wird.

Lösung der Übungsaufgabe 3.13 (Seite 124)

a) Berechnung der Spannungen und Ströme an den Widerständen

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + (R_3||R_4)} U_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3 R_4 \big/ (R_3 + R_4)} U_0 = 6\,\text{V}$$

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + (R_3||R_4)} U_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3 R_4 \big/ (R_3 + R_4)} U_0 = 1{,}5\,\text{V}$$

$$U_3 = \frac{R_3||R_4}{R_1 + R_2 + (R_3||R_4)} U_0 = \frac{R_3 R_4 \big/ (R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 R_4 \big/ (R_3 + R_4)} U_0 = 4{,}5\,\text{V}$$

$$U_4 = U_3 = 4{,}5\,\text{V}$$

$$I_1 = U_1 / R_1 = 6\,\text{mA}$$
$$I_2 = U_2 / R_2 = 6\,\text{mA}$$
$$I_3 = U_3 / R_3 = 4{,}5\,\text{mA}$$
$$I_4 = U_4 / R_4 = 1{,}5\,\text{mA}$$

b) Berechnung von Spannung und Strom an den Klemmen

$$U = U_2 + U_3 = 6\,\text{V}$$
$$I = 0$$

c) Innenwiderstand

$$R_0 = R_1 \Big|\Big| \Big(R_2 + \big(R_3||R_4\big)\Big) = \frac{R_1 \Big(R_2 + R_3 R_4 \big/ \big(R_3 + R_4\big)\Big)}{R_1 + R_2 + R_3 R_4 \big/ \big(R_3 + R_4\big)}$$
$$= \frac{R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3 R_4}{R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4} = 500\,\Omega$$

d) Halbierung der Spannung an den Klemmen ($U = 3\,\text{V}$)

Zur Halbierung der Spannung an den Klemmen muss ein Widerstand angeschlossen werden, der dem Innenwiderstand entspricht, d. h., $R = R_0 = 500\,\Omega$. Damit halbieren sich auch die Spannungen U_2, U_3 und U_4 sowie die Ströme I_2, I_3 und I_4. Für Spannung und Strom am Widerstand R_1 ergibt sich

$$U_1 = U_0 - U = 12\,\text{V} - 3\,\text{V} = 9\,\text{V}$$

und

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{9\,\text{V}}{1\,\text{k}\Omega} = 9\,\text{mA}\,.$$

e) Spannung und Strom am Widerstand R bei Variation im Bereich $0 \leq R < 5R$

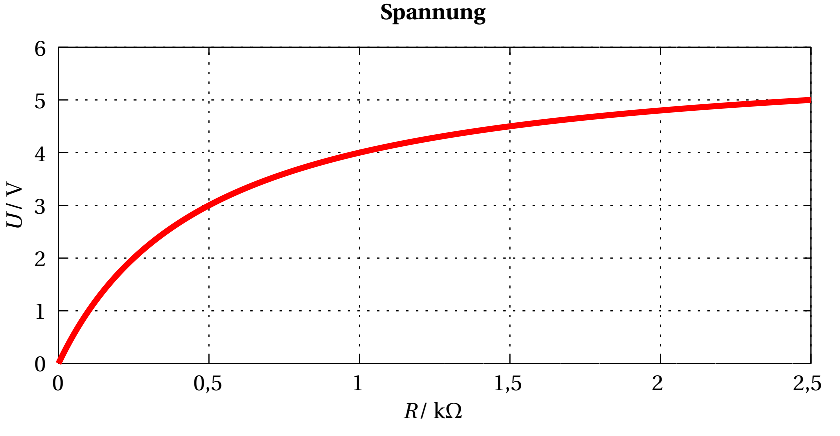
Hierzu betrachten wir eine Ersatzspannungsquelle mit der Quellspannung $U'_0 = 6$ V und dem Innenwiderstand $R'_0 = 500\ \Omega$. Die Quellspannung U'_0 entspricht der Leerlaufspannung an den Klemmen und der Innenwiderstand der Ersatzquelle entspricht dem Innenwiderstand der Schaltung. Für Spannung und Strom ergibt sich

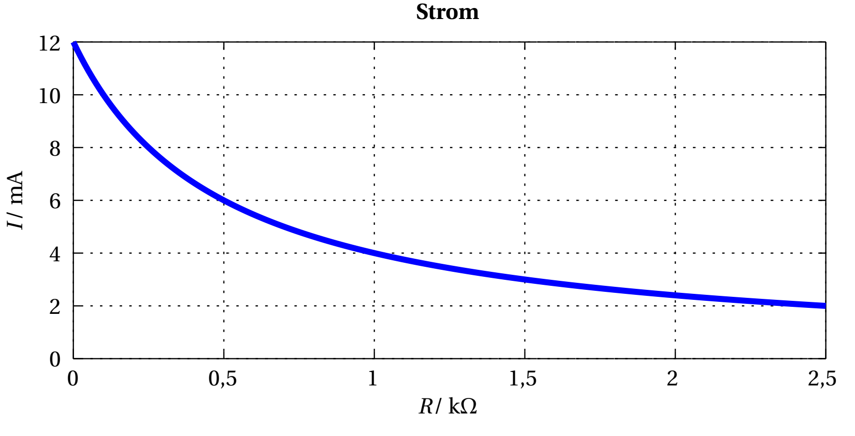
$$U = \frac{R}{R + R'_0} U'_0$$

und

$$I = \frac{U'_0}{R + R'_0}$$

mit $0 \leq R < 5R$.





Octave-Datei: `loesung_03_13.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 3.13

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
R1 = 1e3;     % Ohm
R2 = 250;     % Ohm
R3 = 1e3;     % Ohm
R4 = 3e3;     % Ohm
U0 = 12;      % V
disp("Vorgaben");
disp(["  R1  = ",num2str(R1)," Ohm"]);
disp(["  R2  = ",num2str(R2)," Ohm"]);
disp(["  R3  = ",num2str(R3)," Ohm"]);
disp(["  R4  = ",num2str(R4)," Ohm"]);
disp(["  U0  = ",num2str(U0)," V"]);
disp(" ");

% Spannungen und Ströme
U1 = U0*R1/(R1+R2+R3*R4/(R3+R4));
U2 = U0*R2/(R1+R2+R3*R4/(R3+R4));
U3 = U0-U1-U2;
U4 = U3;
I1 = U1/R1;
I2 = U2/R2;
I3 = U3/R3;
I4 = U4/R4;
disp("Spannungen und Ströme");
disp(["  U1  = ",num2str(U1)," V"]);
disp(["  U2  = ",num2str(U2)," V"]);
disp(["  U3  = ",num2str(U3)," V"]);
disp(["  U4  = ",num2str(U4)," V"]);
disp(["  I1  = ",num2str(I1*1e3)," mA"]);
disp(["  I2  = ",num2str(I2*1e3)," mA"]);
disp(["  I3  = ",num2str(I3*1e3)," mA"]);
disp(["  I4  = ",num2str(I4*1e3)," mA"]);
disp(" ");

% Spannung und Strom an den Klemmen
U = U2+U3;
I = 0;
disp("Spannung und Strom an den Klemmen");
disp(["  U   = ",num2str(U)," V"]);
disp(["  I   = ",num2str(I*1e3)," mA"]);
disp(" ");
```

Octave-Datei: `loesung_03_13.m` (Fortsetzung)

```
% Innenwiderstand
R0 = (R1*R2*R3+R1*R2*R4+R1*R3*R4)/(R1*R3+R1*R4+R2*R3+R2*R4+R3*R4);
disp("Innenwiderstand");
disp(["  R0  = ",num2str(R0)," Ohm"]);
disp(" ");

% Grenzen des Darstellungsbereichs
Rmin = 0;     % Ohm
Rmax = 5*R0;  % Ohm
Umin = 0;     % V
Umax = U0/2;  % V
Imin = 0;     % A
Imax = U0/(2*R0); % A

% Festlegung der Stützstellen
N = 200;
n = 0:(N-1);
R = n*(Rmax-Rmin)/(N-1)+Rmin;

% Spannung und Strom bei Variation des Lastwiderstands R
U = (U0/2)*R./(R+R0);
I = (U0/2)./(R+R0);

% Darstellung der Spannung
hFig1 = figure("Name","Spannung");
hPlot1 = plot(R*1e-3,U,"r"); % R in k Ohm
axis([Rmin*1e-3,Rmax*1e-3,Umin,Umax]);
grid on;
title("\\bf Spannung","FontSize",14);
xlabel("R / k\\Omega ","FontSize",12);
ylabel("U / V","FontSize",12);

% Darstellung des Stroms
hFig2 = figure("Name","Strom");
hPlot2 = plot(R*1e-3,I*1e3,"b"); % R in KOhm, I in mA
axis([Rmin*1e-3,Rmax*1e-3,Imin*1e3,Imax*1e3]);
grid on;
title("\\bf Strom","FontSize",14);
xlabel("R / k\\Omega ","FontSize",12);
ylabel("I / mA","FontSize",12);
```

Übung 3.14 Dreipol

An die Klemmen 1 und 2 eines Dreipols wird die Gleichspannung $U_A = 5\,\mathrm{V}$ angelegt. Die Klemme 3 bleibt zunächst unbeschaltet. Dabei stellt sich der Strom $I_1 = 1\,\mathrm{mA}$ ein. Nun wird zwischen die Klemmen 2 und 3 zusätzlich die Spannung $U_B = 38\,\mathrm{V}$ geschaltet. Jetzt werden die Ströme $I_2 = 2\,\mathrm{mA}$ und $I_3 = -15\,\mathrm{mA}$ beobachtet.

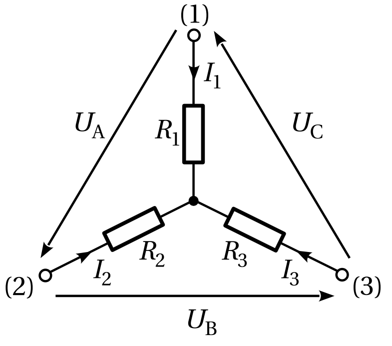
a) Realisieren Sie den Dreipol durch eine Sternschaltung aus drei Widerständen und bestimmen Sie die Widerstände R_1, R_2 und R_3.

b) Bestimmen Sie die Widerstände R_A, R_B und R_C der entsprechenden Dreieckschaltung direkt aus den vorgegebenen Spannungen und Strömen.

c) Wenden Sie nun die Formeln der Stern-Dreieck-Umrechnung zur Überprüfung Ihres Ergebnisses an.

Lösung der Übungsaufgabe 3.14 (Seite 125)

a) Widerstände R_1, R_2 und R_3 der Sternschaltung



1. Nur $U_A = 5\,\text{V}$ zwischen den Klemmen 1 und 2 angelegt, Klemme 3 bleibt unbeschaltet ($I_3 = 0$):

$$U_A = 5\,\text{V}, \quad I_1 = 1\,\text{mA} \quad \Rightarrow \quad R_1 + R_2 = \frac{U_A}{I_1} = 5\,\text{k}\Omega$$

2. Zusätzlich wird $U_B = 38\,\text{V}$ zwischen den Klemmen 2 und 3 angelegt, dabei ändert sich I_1:

$$U_A = 5\,\text{V}, \quad U_B = 38\,\text{V}, \quad I_2 = 2\,\text{mA} \quad, I_3 = -15\,\text{mA}$$

I_1 ist zunächst unbekannt, aber

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = -I_2 - I_3 = -2\,\text{mA} + 15\,\text{mA} = 13\,\text{mA}$$

Wir benötigen zwei Maschengleichungen und eine Knotengleichung[1]

$$U_A = R_1\,I_1 - R_2\,I_2$$
$$U_B = R_2\,I_2 - R_3\,I_3$$
$$I_1 = -I_2 - I_3$$

und erhalten daraus die Beziehungen

$$U_A = -R_1\,(I_2 + I_3) - R_2\,I_2 = -(R_1 + R_2)\,I_2 - R_1\,I_3$$
$$R_1 = -\frac{(R_1 + R_2)\,I_2 + U_A}{I_3} = -\frac{5\,\text{k}\Omega \cdot 2\,\text{mA} + 5\,\text{V}}{-15\,\text{mA}} = 1\,\text{k}\Omega$$
$$R_2 = 5\,\text{k}\Omega - R_1 = 5\,\text{k}\Omega - 1\,\text{k}\Omega = 4\,\text{k}\Omega$$
$$R_3 = \frac{R_2\,I_2 - U_B}{I_3} = \frac{4\,\text{k}\Omega \cdot 2\,\text{mA} - 38\,\text{V}}{-15\,\text{mA}} = 2\,\text{k}\Omega$$

[1] Die Knotengleichung ist nur erforderlich, wenn wir den bereits ermittelten Strom I_1 nicht explizit verwenden, sondern durch I_2 und I_3 ausdrücken.

Beide Schaltzustände, also mit und ohne U_B müssen zur Lösung heran gezogen werden. Die Kenntnis des zweiten Schaltzustandes alleine reicht nicht aus, um die Widerstände eindeutig bestimmen zu können, obwohl alle äußeren Spannungen und Ströme bekannt sind.

Um dies zu zeigen, analysieren wir den zweiten Schaltzustand und erhalten mit

$$I_1 = -I_2 - I_3 = 13\ \mathrm{mA} \quad \text{und} \quad U_\mathrm{C} = -U_\mathrm{A} - U_\mathrm{B} = -43\ \mathrm{V}$$

das folgende Gleichungssystem und stellen dieses in Matrixschreibweise dar.

$$\begin{array}{rcl} R_1\, I_1 - R_2\, I_2 & = & U_\mathrm{A} \\ R_2\, I_2 - R_3\, I_3 & = & U_\mathrm{B} \\ R_3\, I_3 - R_1\, I_1 & = & U_\mathrm{C} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} I_1 & -I_2 & 0 \\ 0 & I_2 & -I_3 \\ -I_1 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_\mathrm{A} \\ U_\mathrm{B} \\ U_\mathrm{C} \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist dann durch

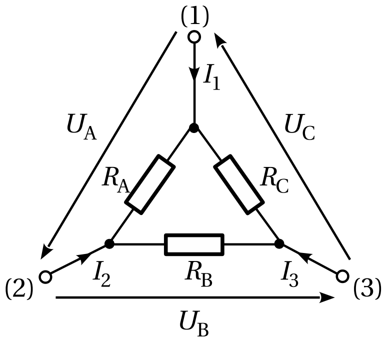
$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & -I_2 & 0 \\ 0 & I_2 & -I_3 \\ -I_1 & 0 & I_3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} U_\mathrm{A} \\ U_\mathrm{B} \\ U_\mathrm{C} \end{pmatrix}$$

gegeben, sofern die Inverse der Matrix existiert, d. h., ihre Determinante darf nicht null sein. Hier ergibt sich aber

$$\begin{vmatrix} I_1 & -I_2 & 0 \\ 0 & I_2 & -I_3 \\ -I_1 & 0 & I_3 \end{vmatrix} = I_1 \begin{vmatrix} I_2 & -I_3 \\ 0 & I_3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & I_3 \end{vmatrix} - I_1 \begin{vmatrix} -I_2 & 0 \\ I_2 & -I_3 \end{vmatrix} = I_1\, I_2\, I_3 - I_1\, I_2\, I_3 = 0\,.$$

Damit ist gezeigt, dass aus einem einzigen (vollständigen) Satz äußerer Spannungen und Ströme nicht auf die Widerstandswerte der Sternschaltung geschlossen werden kann. Es gibt keine eindeutige Lösung. Das Potential des Sternpunktes ist unbestimmt und variiert je nach Wahl der Widerstände, ohne dass dies von außen zu bemerken ist.

b) Widerstände R_A, R_B und R_C der Dreieckschaltung



Wir gehen hier genau wie im Aufgabenpunkt a) vor, berücksichtigen jedoch die abweichende Verschaltung der Widerstände.

1. Nur $U_A = 5\,\text{V}$ zwischen den Klemmen 1 und 2 angelegt, Klemme 3 bleibt unbeschaltet ($I_3 = 0$):

   $$U_A = 5\,\text{V}, \quad I_1 = 1\,\text{mA} \quad \Rightarrow \quad R_A||(R_B + R_C) = \frac{R_A\left(R_B + R_C\right)}{R_A + R_B + R_C} = \frac{U_A}{I_1} = 5\,\text{k}\Omega$$

2. Zusätzlich wird $U_B = 38\,\text{V}$ zwischen den Klemmen 2 und 3 angelegt, dabei ändert sich I_1:

   $$U_A = 5\,\text{V}, \quad U_B = 38\,\text{V}, \quad I_2 = 2\,\text{mA} \quad , I_3 = -15\,\text{mA}$$

   I_1 ist zunächst unbekannt, aber

   $$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = -I_2 - I_3 = -2\,\text{mA} + 15\,\text{mA} = 13\,\text{mA}$$

   Des weiteren lässt sich auch

   $$U_C = -U_A - U_B = -5\,\text{V} - 38\,\text{V} = -43\,\text{V}$$

   bestimmen.

Wir benötigen nun zusätzlich zur Gleichung aus dem ersten Schaltzustand noch zwei Knotengleichungen und eine Maschengleichung[2]. Damit erhalten wir ein Gleichungssystem mit vier Unbekannten, nämlich der Spannung U_C sowie den Widerständen R_A, R_B und R_C.

$$I_2 = \frac{U_B}{R_B} - \frac{U_A}{R_A}$$
$$I_3 = \frac{U_C}{R_C} - \frac{U_B}{R_B}$$
$$U_C = -U_A - U_B$$
$$\frac{R_A\left(R_B + R_C\right)}{R_A + R_B + R_C} = 5\,\text{k}\Omega$$

[2] Die Maschengleichung ist nur erforderlich, wenn wir die bereits ermittelte Spannung U_C nicht explizit verwenden, sondern durch U_A und U_B ausdrücken.

Nach einer sehr umfangreichen Rechnung, die wesentlich aufwendiger als im Aufgabenpunkt a) ist, erhalten wir schließlich die Widerstandswerte der Dreieckschaltung.

$$R_A = \frac{U_A^2 + \left(U_A I_2 + U_A I_3 + U_B I_3\right) \cdot 5\,\mathrm{k\Omega}}{I_3 U_B - \left(I_2^2 + I_2 I_3\right) \cdot 5\,\mathrm{k\Omega} - I_2 U_A} = 7\,\mathrm{k\Omega}$$

$$R_B = \frac{U_B R_A}{R_A I_2 + U_A} = 14\,\mathrm{k\Omega}$$

$$R_C = \frac{\left(R_A + R_B\right) \cdot 5\,\mathrm{k\Omega} - R_A R_B}{R_A - 5\,\mathrm{k\Omega}} = 3{,}5\,\mathrm{k\Omega}$$

Auf die schrittweise Herleitung dieses Ergebnisses soll hier verzichtet werden. Wir wollen uns statt dessen die Frage stellen, warum die Rechnung in diesem Fall so viel komplizierter ist, als bei der Sternschaltung. Betrachten wir dazu den ersten Schaltzustand und die Berechnung des Widerstandes zwischen den Klemmen 1 und 2. Zunächst einmal tritt hier eine Parallelschaltungen auf, somit ist die Zusammenfassung von Widerständen etwas aufwendiger. Eine Berechnung mit Leitwerten brächte allerdings auch keine Vereinfachung, da auch eine Reihenschaltung vorhanden ist, d. h., statt

$$\frac{R_A \left(R_B + R_C\right)}{R_A + R_B + R_C} = \frac{U_A}{I_1} = 5\,\mathrm{k\Omega}$$

erhalten wir bei der Verwendung von Leitwerten

$$\frac{G_B + G_C}{G_A G_B + G_A G_C + G_B G_C} = \frac{U_A}{I_1} = 5\,\mathrm{k\Omega}\,.$$

Damit alleine ist keine Vereinfachung zu erzielen. Entscheidend ist hier, dass beim ersten Schaltzustand der Sternschaltung die Klemme 3 nicht beschaltet ist und dadurch der Widerstand R_3 gar nicht in Erscheinung tritt. Ein entsprechendes Verhalten könnte bei der Dreieckschaltung erreicht werden, indem beispielsweise die Klemme 3 mit der Klemme 1 verbunden würde, d. h., die Spannung U_C würde im ersten Schaltzustand verschwinden und aus der Kenntnis von U_A und I_1 ließe sich dann der Widerstand der Parallelschaltung von R_A und R_B bestimmen. Der Widerstand R_C träte dann nicht auf. Die Berechnung der Dreieckschaltung wäre unter diesen Bedingungen lediglich so umfangreich, wie im Aufgabenpunkt a). Allerdings wäre dann die Berechnung der Sternschaltung wesentlich umfangreicher. Wie umfangreich die Berechnungen werden, hängt also entscheidend von der verwendeten Messmethode ab.

c) Anwendung der Formeln zur Stern-Dreieck-Umwandlung

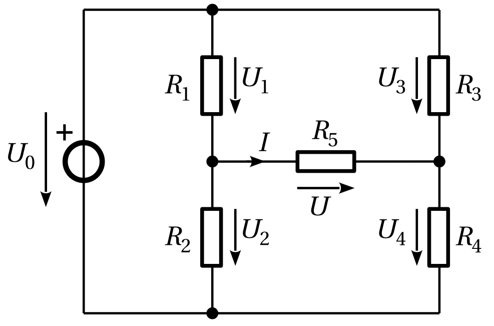
$$R_A = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_3} = \frac{1\,\mathrm{k\Omega} \cdot 4\,\mathrm{k\Omega} + 4\,\mathrm{k\Omega} \cdot 2\,\mathrm{k\Omega} + 1\,\mathrm{k\Omega} \cdot 2\,\mathrm{k\Omega}}{2\,\mathrm{k\Omega}} = 7\,\mathrm{k\Omega}$$

$$R_B = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_1} = \frac{1\,\mathrm{k\Omega} \cdot 4\,\mathrm{k\Omega} + 4\,\mathrm{k\Omega} \cdot 2\,\mathrm{k\Omega} + 1\,\mathrm{k\Omega} \cdot 2\,\mathrm{k\Omega}}{1\,\mathrm{k\Omega}} = 14\,\mathrm{k\Omega}$$

$$R_C = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_2} = \frac{1\,\mathrm{k\Omega} \cdot 4\,\mathrm{k\Omega} + 4\,\mathrm{k\Omega} \cdot 2\,\mathrm{k\Omega} + 1\,\mathrm{k\Omega} \cdot 2\,\mathrm{k\Omega}}{4\,\mathrm{k\Omega}} = 3{,}5\,\mathrm{k\Omega}$$

Übung 3.15 Stern- und Dreieckschaltung

In der abgebildeten Schaltung lassen sich mehrere Sternschaltungen und mehrere Dreieckschaltungen identifizieren.



$R_1 = 1\,\text{k}\Omega$

$R_2 = 1\,\text{k}\Omega$

$R_3 = 2\,\text{k}\Omega$

$R_4 = 2\,\text{k}\Omega$

$R_5 = 100\,\Omega$

$U_0 = 10\,\text{V}$

a) Geben Sie die Spannung U und den Strom I an.

b) Welche Widerstände können jeweils zu Sternschaltungen und welche zu Dreieckschaltungen zusammengefasst werden?

c) Ersetzen Sie eine der vorhandenen Sternschaltungen durch eine Dreieckschaltung (Skizze). Bezeichnen Sie die Widerstände der Ersatzschaltung mit R_6, R_7 und R_8 und berechnen Sie diese.

d) Ersetzen Sie eine der vorhandenen Dreieckschaltungen durch eine Sternschaltung (Skizze). Bezeichnen Sie die Widerstände der Ersatzschaltung mit R_9, R_{10} und R_{11} und berechnen Sie diese.

e) Verifizieren Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabenpunkt a) durch Interpretation der Ergebnisse der Aufgabenpunkte c) und d).

Lösung der Übungsaufgabe 3.15 (Seite 125)

a) Spannung U und Strom I

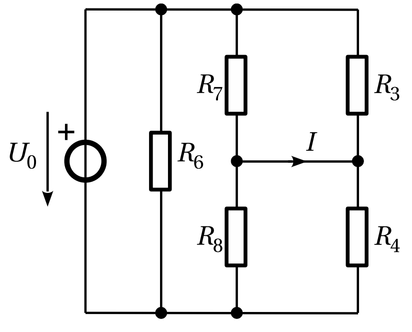
Die Brücke ist abgeglichen, da

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad \Rightarrow \quad U = 0 \text{ und } I = 0\,.$$

b) Sternschaltungen und Dreieckschaltungen

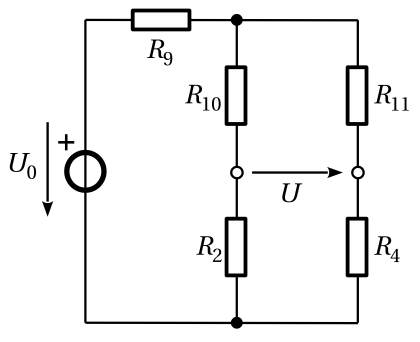
Sternschaltungen: R_1-R_2-R_5 und R_3-R_4-R_5
Dreieckschaltungen: R_1-R_3-R_5 und R_2-R_4-R_5

c) Sternschaltung R_1-R_2-R_5 wird durch Dreieckschaltung R_6-R_7-R_8 ersetzt.



$$R_6 = \frac{R_1R_2 + R_1R_5 + R_2R_5}{R_5} = 12\ \text{k}\Omega$$
$$R_7 = \frac{R_1R_2 + R_1R_5 + R_2R_5}{R_2} = 1{,}2\ \text{k}\Omega$$
$$R_8 = \frac{R_1R_2 + R_1R_5 + R_2R_5}{R_1} = 1{,}2\ \text{k}\Omega$$

d) Dreieckschaltung R_1-R_3-R_5 wird durch Sternschaltung R_9-R_{10}-R_{11} ersetzt.



$$R_9 = \frac{R_1R_3}{R_1 + R_3 + R_5} = 645\ \Omega$$
$$R_{10} = \frac{R_1R_5}{R_1 + R_3 + R_5} = 32\ \Omega$$
$$R_{11} = \frac{R_3R_5}{R_1 + R_3 + R_5} = 64\ \Omega$$

e) Verifikation der Ergebnisse

i) Vergleich der Lösung a) mit dem Ergebnis von Aufgabenpunkt c)
Aus Aufgabenpunkt c) ergibt sich $R_7 = R_8$. Damit ist auch die kurzgeschlossene Brücke dieser Ersatzschaltung abgeglichen, d. h., $I = 0$.

ii) Vergleich der Lösung a) mit dem Ergebnis von Aufgabenpunkt d)
Aus Aufgabenpunkt d) ergibt sich das Widerstandsverhältnis $R_{10}/R_{11} = R_1/R_3$. Wegen $R_1/R_2 = R_3/R_4$ ist damit auch $R_{10}/R_2 = R_{11}/R_4$ erfüllt. Die offene Brücke dieser Ersatzschaltung ist somit auch abgeglichen, d. h., $U = 0$.